

ESERCIZI di STRUTTURE

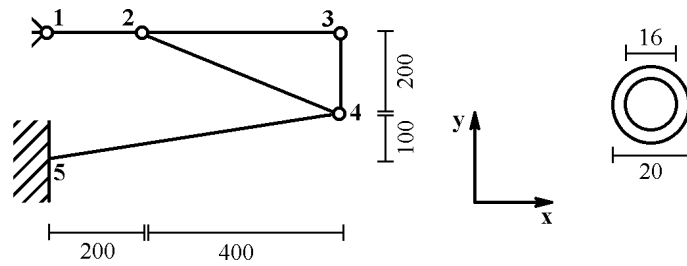
a cura di
Paolo Massioni
pmassio@hotmail.com

disponibile in rete all'indirizzo
<http://pmassio.altervista.org>

Queste pagine sono protette dalle leggi sul diritto d'autore. L'Autore vieta quindi espressamente qualunque utilizzo a fini di lucro di queste pagine. Chiunque è libero di scaricare, consultare, stampare e distribuire queste pagine purché esse non siano alterate e nessuno ne tragga vantaggio economico.

Questi appunti vengono resi pubblici dall'Autore al fine di rendere un utile servizio agli studenti. Nonostante la cura e le numerose revisioni del testo, l'Autore non può garantire l'assoluta correttezza del contenuto di queste pagine. Il contenuto di questo documento non è di per sé sufficiente per il superamento dell'esame.

ESERCIZIO 1



$$E = 7300 \text{ kg/m}^3$$

Illustrare il procedimento necessario per il calcolo della matrice di flessibilità del nodo 3 con un metodo agli spostamenti.

SOLUZIONE

La struttura proposta non è una travatura reticolare: pertanto si dovrà tenere conto dell'incastro nel nodo 5.

La matrice di rigidezza da usare sarà dunque quella delle bielle per le aste 2-3, 3-4, 1-2 e 2-4, e quella dell'asta completa bidimensionale per la trave e 5-4.

biella:
$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

asta:
$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l} & \frac{6EJ}{l} & 0 & -\frac{12EJ}{l} & \frac{6EJ}{l} \\ 0 & \frac{6EJ}{l} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l} & 0 & \frac{12EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l} \\ 0 & \frac{6EJ}{l} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}$$

(dove ovviamente nella biella sono presenti solo le componenti 1 e 4)

Come vettore degli spostamenti globali si sceglie:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} s_{x1} \\ s_{y1} \\ s_{x2} \\ s_{y2} \\ s_{x3} \\ s_{y3} \\ s_{x4} \\ s_{y4} \\ s_{x5} \\ s_{y5} \\ \theta_{z5} \end{Bmatrix}$$

Prima di procedere conviene calcolare:

$$A = \pi(R^2 - r^2) \cong 113,1 \text{ mm}^2$$

$$J = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) \cong 4367 \text{ mm}^4$$

Biella I: 1-2

$$[\bar{K}]_I = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 4128,2 & -4128,2 \\ -4128,2 & 4128,2 \end{bmatrix}$$

$$[T]_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_I = [T]_I^T [\bar{K}]_I [T]_I \cong \begin{bmatrix} 4128,2 & 0 & -4128,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4128,2 & 0 & 4128,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega]_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega]_I^T [K]_I [\Omega]_I \cong \dots$$

Biella II: 2-3

$$[\bar{K}]_{II} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2064,1 & -2064,1 \\ -2064,1 & 2064,1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{II} = [T]_{II}^T [\bar{K}]_{II} [T]_{II} \cong \begin{bmatrix} 2064,1 & 0 & -2064,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2064,1 & 0 & 2064,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega]_{II} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega]_{II}^T [K]_{II} [\Omega]_{II} \cong \dots$$

Biella III: 3-4

$$[\bar{K}]_{III} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 4128,2 & -4128,2 \\ -4128,2 & 4128,2 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{III} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{III} = [T]_{III}^T [\bar{K}]_{III} [T]_{III} \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4128,2 & 0 & -4128,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4128,2 & 0 & 4128,2 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega]_{III} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega]_{III}^T [K]_{III} [\Omega]_{III} \cong \dots$$

Biella IV: 2-4

$$[\bar{K}]_{IV} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1846,2 & -1846,2 \\ -1846,2 & 1846,2 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{VI} = \begin{bmatrix} 0,8944 & -0,4472 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8944 & -0,4472 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{VI} = [T]_{VI}^T [\bar{K}]_{VI} [T]_{VI} \cong \begin{bmatrix} 1476,9 & -738,4 & -1476,9 & 738,4 \\ -738,4 & 369,2 & 738,4 & -369,2 \\ -1476,9 & 738,4 & 1476,9 & -738,4 \\ 738,4 & -369,2 & -738,4 & 369,2 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega]_{VI} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega]_{IV}^T [K]_{IV} [\Omega]_{IV} \cong \dots$$

Trave V: 5-4

Della matrice completa, non interessa la rotazione del nodo 4. Per cui si può eliminare la sesta riga e colonna:

$$[\bar{K}]_V = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^2} & -\frac{6EJ}{l} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} \end{bmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{bmatrix} 1357,3 & 0 & 0 & -1357,3 & 0 \\ 0 & 628907 & 314454 & 0 & -628907 \\ 0 & 314454 & 209636 & 0 & -314454 \\ -1357,3 & 0 & 0 & 1357,3 & 0 \\ 0 & -628907 & -314454 & 0 & 628907 \end{bmatrix}$$

$$[T]_V = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,9864 & 0,1644 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1644 & 0,9864 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9864 & 0,1644 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1644 & 0,9864 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_V = [T]_V^T [\bar{K}]_V [T]_V \cong \dots$$

$$[\Omega]_V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega]_V^T [K]_V [\Omega]_V \cong \dots$$

Assemblaggio

$$[K] = \sum_{i=1}^5 [\Omega]_i^T [K]_i [\Omega]_i \cong \dots$$

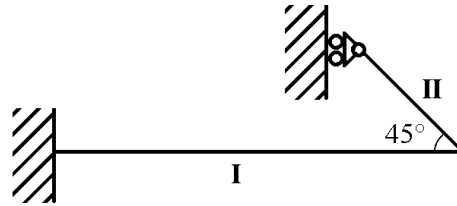
La matrice di rigidezza così ottenuta è una matrice 11 x 11. L'inserimento dei vincoli richiede di porre:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} s_{x1} \\ s_{y1} \\ s_{x2} \\ s_{y2} \\ s_{x3} \\ s_{y3} \\ s_{x4} \\ s_{y4} \\ s_{x5} \\ s_{y5} \\ \theta_{z5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_{x2} \\ s_{y2} \\ s_{x3} \\ s_{y3} \\ s_{x4} \\ s_{y4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Per cui da tale matrice di rigidezza vanno eliminate le righe e le colonne numero 1, 2, 9, 10 e 11. Dopodiché ciò che resta della matrice di rigidezza è invertibile, e la sottomatrice contenente le righe e colonne terze e quarte di tale inversa costituiscono la matrice di flessibilità del nodo 3.

ESERCIZIO 2

Si consideri la seguente struttura bidimensionale:



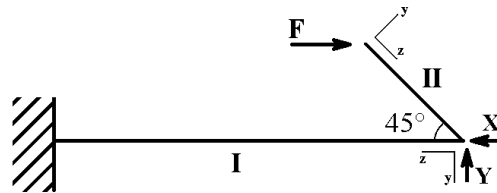
$$\begin{aligned} L_1 &= 1000 \text{ mm} \\ L_2 &= 200 \text{ mm} \\ E &= 7300 \text{ kg/mm}^2 \\ J &= 10000 \text{ mm}^4 \\ A &= 400 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Ricavare la matrice di flessibilità dello spigolo rispetto alle direzioni orizzontale e verticale, ignorando gli effetti del taglio.

SOLUZIONE

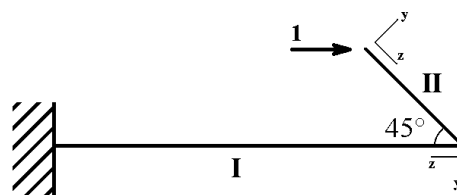
La struttura è una volta iperstatica. Prima di procedere è necessario “rimovere un vincolo” e calcolare il valore di tale iperstatica. Si toglie dunque il carrello:

Sistema reale



$$\text{II:} \begin{cases} T_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} F \\ T_z = -\frac{\sqrt{2}}{2} F \\ M_x = -\frac{\sqrt{2}}{2} F L_2 \end{cases} \quad \text{I:} \begin{cases} T_y = Y \\ T_z = F - X \\ M_x = -\frac{\sqrt{2}}{2} F L_2 + Y L_2 \end{cases}$$

Sistema fittizio



$$\text{II:} \begin{cases} T'_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ T'_z = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ M'_x = -\frac{\sqrt{2}}{2} z \end{cases} \quad \text{I:} \begin{cases} T'_y = 0 \\ T'_z = 1 \\ M'_x = -\frac{\sqrt{2}}{2} L_2 \end{cases}$$

Lavoro virtuale:

$$\delta L_e = \delta L_i \Rightarrow$$

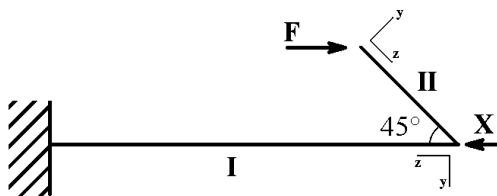
$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{L_2} \left(\frac{F}{2EA} + \frac{F}{2EJ} z^2 \right) dz + \int_0^{L_1} \left(\frac{F-X}{EA} + \frac{FL_2^2}{2EJ} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{L_2 Y}{EJ} z \right) dz = \\ &= \frac{FL_2}{2EA} + \frac{FL_2^3}{6EJ} + \frac{(F-X)L_1}{EA} + \frac{FL_2^2 L_1}{2EJ} - \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{L_2 L_1^2 Y}{EJ} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{L_1}{EA} X + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{L_2 L_1^2}{EJ} Y = \left(\frac{L_2}{2EA} + \frac{L_2^3}{6EJ} + \frac{L_1}{EA} + \frac{L_2^2 L_1}{2EJ} \right) F \end{aligned}$$

Svolgendo i conti:

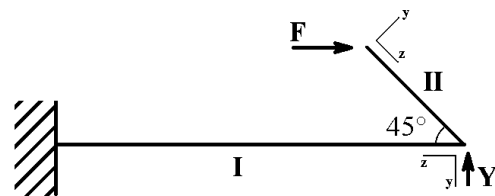
$$F = 0,0012 X + 3,3 Y$$

Per il calcolo della matrice di flessibilità si introducono altri due sistemi reali:

Sistema reale 1



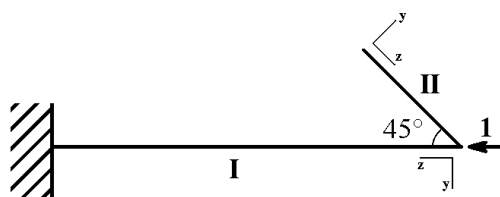
Sistema reale 2



$$\text{II:} \begin{cases} T_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_x \\ T_z = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_x \\ M_x = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_x z \end{cases} \quad \text{I:} \begin{cases} T_y = 0 \\ T_z = F_x - X \\ M_x = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_x L_2 \end{cases} \quad \text{II:} \begin{cases} T_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_y \\ T_z = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_y \\ M_x = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_y z \end{cases} \quad \text{I:} \begin{cases} T_y = Y \\ T_z = F_y \\ M_x = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_y L_2 + Yz \end{cases}$$

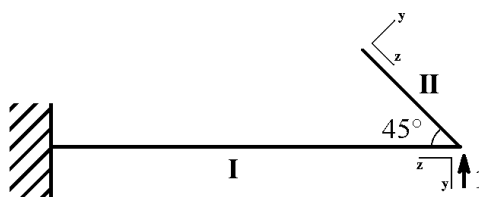
E due sistemi fittizi (non è necessario che siano congruenti):

Sistema fittizio 1



$$\text{I: } \begin{cases} T_y = 0 \\ T_z = -1 \\ M_x = 0 \end{cases}$$

Sistema fittizio 2



$$\text{I: } \begin{cases} T_y = 1 \\ T_z = 0 \\ M_x = z \end{cases}$$

Coefficiente 1-1:

Si deve far lavorare il sistema reale 1 con il fittizio 1:

$$\delta L_e = \delta L_i \Rightarrow$$

$$1 \cdot s_x = \int_0^{L_1} \left(-\frac{F_x - X}{EA} \right) dz = -\frac{F_x - X}{EA} L_1 \Rightarrow s_x = 0,00034X \Rightarrow C_{11} = 0,00034$$

Coefficiente 2-2:

Si deve far lavorare il sistema reale 2 con il fittizio 2:

$$\delta L_e = \delta L_i \Rightarrow$$

$$1 \cdot s_y = \int_0^{L_1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{F_y L_2}{EJ} z + \frac{Y}{EJ} z^2 \right) dz = -\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{F_y L_2}{EJ} L_1^2 + \frac{Y}{3EJ} L_1^3 \Rightarrow s_y = 1,37Y \Rightarrow C_{22} = 1,37$$

Coefficiente 1-2 (e 2-1):

Si deve far lavorare il sistema reale 2 con il fittizio 1:

$$\delta L_e = \delta L_i \Rightarrow$$

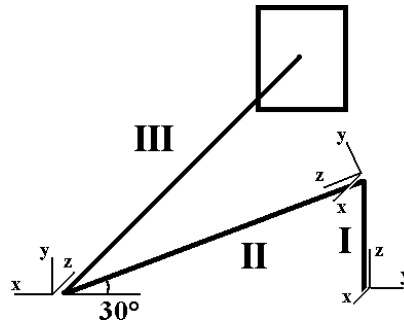
$$1 \cdot s_x = \int_0^{L_1} \left(-\frac{F_y}{EA} \right) dz = -\frac{F_y}{EA} L_1 \Rightarrow s_x = -0,0011Y \Rightarrow C_{12} = C_{21} = -0,0011$$

La matrice cercata è:

$$C = \begin{bmatrix} 0,00034 & -0,0011 \\ -0,0011 & 1,37 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 3

Si consideri la seguente struttura tridimensionale:



L'asta III è orizzontale, la I verticale e la II è ortogonale alla III e inclinata di 30° rispetto all'orizzontale (per cui $L_2 = 2L_1$).

Sull'asta I agisce un carico distribuito diretto come l'asse X locale descritto dalla legge:

$$r_x(z) = r_0 z$$

Calcolare le azioni interne.

SOLUZIONE

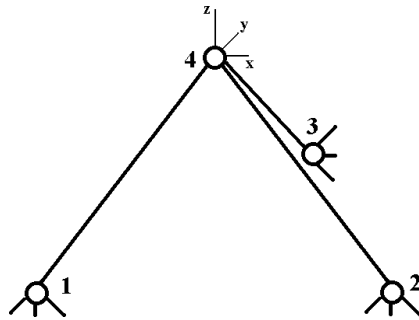
$$\text{I: } \begin{cases} T_x = -\frac{r_0}{2} z^2 \\ M_y = \frac{r_0}{6} z^3 \end{cases}$$

$$\text{II: } \begin{cases} T_x = -\frac{L_1^2 r_0}{2} \\ M_y = -\frac{L_1^3 r_0}{12} + \frac{L_1^2 r_0}{2} z \\ M_z = -\frac{\sqrt{3} L_1^3 r_0}{12} \end{cases}$$

$$\text{III: } \begin{cases} T_z = \frac{L_1^2 r_0}{2} \\ M_y = \frac{\sqrt{3} L_1^2 L_2 r_0}{6} \\ M_x = \frac{L_1^3 r_0}{3} \end{cases}$$

ESERCIZIO 4

Si consideri la seguente struttura tridimensionale:



Le aste sono tutte di uguali di lunghezza l e i nodi sono disposti come i vertici di un tetraedro regolare.

Calcolare la matrice di rigidezza.

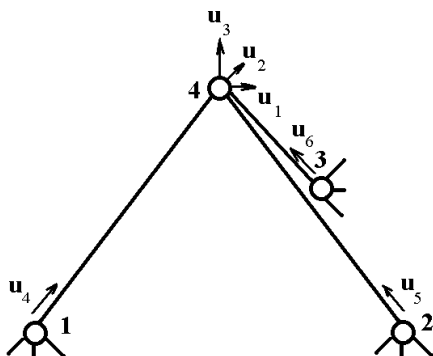
SOLUZIONE

La struttura una travatura reticolare: pertanto si dovrà tenere conto solo delle azioni assiali. La matrice di rigidezza da usare sarà dunque quella delle bielle:



$$\text{biella: } \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

Come vettore degli spostamenti globali si sceglie:



$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

Prima di procedere conviene scrivere le coordinate dei nodi nello spazio cartesiano, secondo una terna centrata nel nodo 4. Tali coordinate sono facilmente ricavabili da considerazioni di geometria solida sul tetraedro regolare:

$$P_1 = l \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

$$P_2 = l \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

$$P_3 = l \left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

$$P_4 = (0; 0; 0)$$

Biella I: 1-4

$$[\bar{K}]_I = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per trovare la matrice di rotazione occorre scrivere i coseni direttori del vettore $P_4 - P_1$, in quanto al nodo 4 varrà che:

$$\bar{u}_1 = \frac{\{P_4 - P_1\}^T}{l} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

mentre per il nodo 1 nessun problema in quanto lo spostamento locale coincide con quello globale. Si ha quindi:

$$[T]_I = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_I = [T]_I^T [\bar{K}]_I [T]_I = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \dots \\ \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \dots \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$[\Omega]_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega]_I^T [K]_I [\Omega]_I = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{6} & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} & \dots & 0 & 0 \\ 12 & 12 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{6} & \sqrt{2} & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Biella II: 2-4

$$[\bar{K}]_{II} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{II} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{II} = [T]_{II}^T [\bar{K}]_{II} [T]_{II} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{6} & \dots \\ 4 & 12 & 6 & \dots \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} & \dots \\ 12 & 12 & 6 & \dots \\ \sqrt{6} & \sqrt{2} & 2 & \dots \\ 6 & 6 & 3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$[\Omega]_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega]_{II}^T [K]_{II} [\Omega]_{II} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{6} & 0 & \dots & 0 \\ 4 & 12 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} & 0 & \dots & 0 \\ 12 & 12 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{6} & \sqrt{2} & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 6 & 6 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Biella III: 3-4

$$[\bar{K}]_{\text{III}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\text{III}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{\text{III}} = [T]_{\text{III}}^T [\bar{K}]_{\text{III}} [T]_{\text{III}} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \dots \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2}{3} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$[\Omega]_{\text{III}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega]_{\text{III}}^T [K]_{\text{III}} [\Omega]_{\text{III}} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

Assemblaggio

$$[K] = \sum_{i=1}^5 [\Omega]_i^T [K]_i [\Omega]_i = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

La matrice di rigidezza così ottenuta è una matrice 6 x 6. L'inserimento dei vincoli richiede di porre:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Per cui da tale matrice di rigidezza vanno eliminate le ultime tre righe e colonne; i termini volutamente non calcolati spariscono:

$$[K]_{vinc} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE ALTERNATIVA

Si riflette preliminarmente su come sarà la matrice di flessibilità della struttura. Essendo la struttura simmetrica rispetto:

- riflessione al piano YZ
- rotazione di 120° all'asse Z

se ne deduce che al nodo 4:

- una forza in direzione Z può produrre spostamenti solo in direzione Z (se ne producesse altri complanari ad XY, una rotazione di 120° causerebbe un assurdo)
- una forza in direzione Y può produrre spostamenti soltanto nella sua direzione (se ne producesse altri, la riflessione e la rotazione creerebbero un assurdo)
- una forza in direzione X (antisimmetrica alla riflessione) può causare spostamenti antisimmetrici e quindi nessuno spostamento in direzione Y e Z.

Le tre componenti di spostamento e forza sono dunque disaccoppiate fra loro; pertanto le matrici di flessibilità e rigidezza saranno diagonali.

Forti di questa conoscenza si può procedere con un metodo alle forze per calcolare la matrice di flessibilità; ci saranno solo 3 PLC da effettuare, e la matrice finale sarà facilmente invertibile.