ESERCIZI

di

STRUTTURE AERONAUTICHE

a cura di

Paolo Massioni

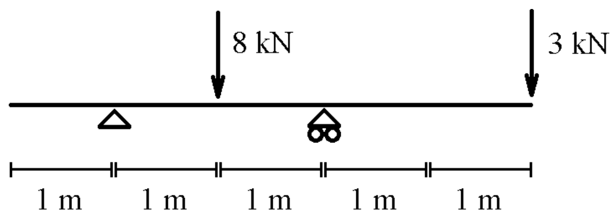
pmassio@hotmail.com

disponibile in rete all'indirizzo

http://pmassio.altervista.org

ESERCIZIO 1

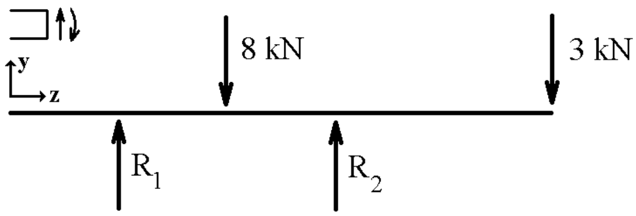
Si consideri la seguente struttura:



Determinare le espressioni e i grafici di taglio e momento flettente.

SOLUZIONE

La struttura è isostatica e soggetta a carichi verticali; al posto dei vincoli vengono inserite le reazioni. Si imposta anche un riferimento e una convenzione per le azioni interne:

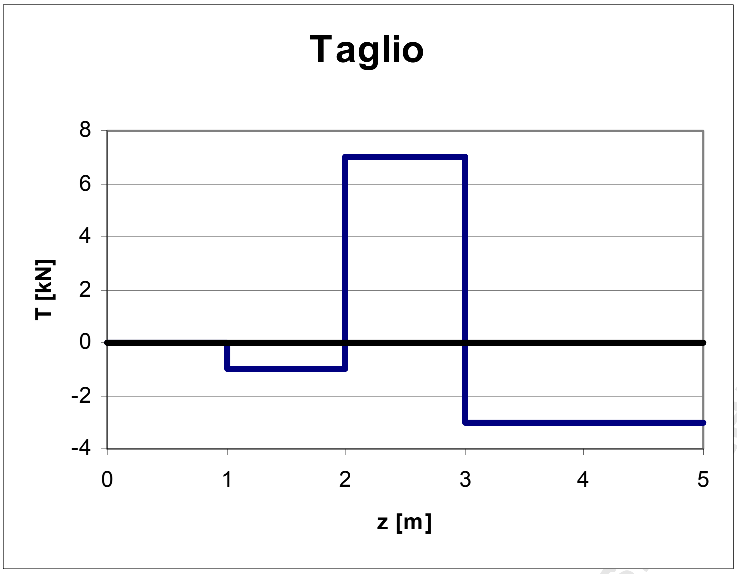


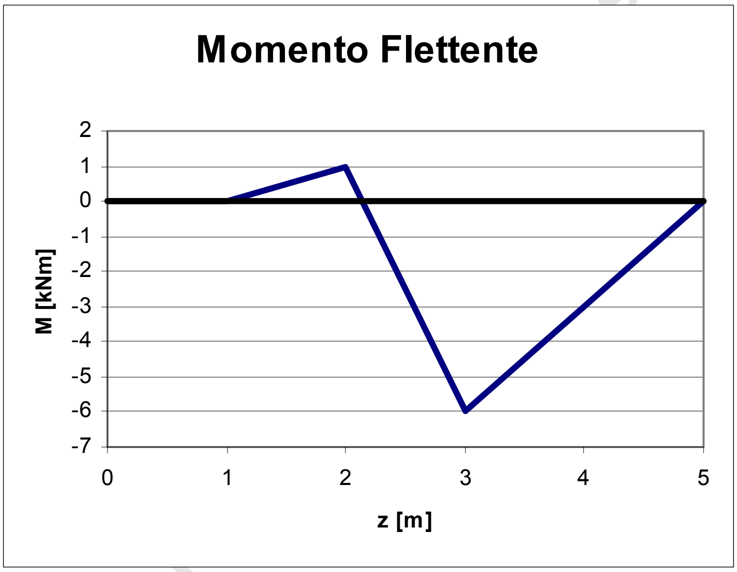
Dall'equilibrio ai momenti nel punto di applicazione di R_1 si può scrivere:
$2R_2 - 1 \cdot 8\,\mathrm{kN} - 4 \cdot 3\,\mathrm{kN} = 0 \Rightarrow R_2 = 10\,\mathrm{kN}$

Dall'equilibrio alla traslazione verticale:
$8\,\mathrm{kN} + 3\,\mathrm{kN} = R_2 + R_1 \Rightarrow R_1 = 1\,\mathrm{kN}$

A questo punto si possono ricavare taglio e azioni interne:

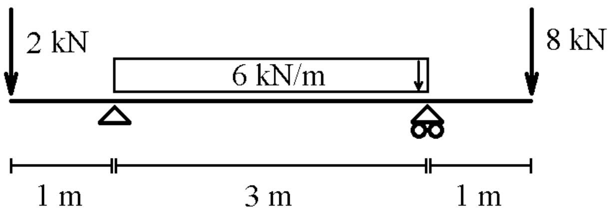
$$T_y = \begin{cases} 0 \\ -1\,\mathrm{kN} \\ 7\,\mathrm{kN} \\ -3\,\mathrm{kN} \\ -3\,\mathrm{kN} \end{cases} \quad M_x = \begin{cases} 0 & 0 < z < 1\,\mathrm{m} \\ (z - 1\,\mathrm{m})\mathrm{kN} & 1\,\mathrm{m} < z < 2\,\mathrm{m} \\ -7(z - 2\,\mathrm{m})\mathrm{kN} + 1\,\mathrm{kNm} \quad \text{per} & 2\,\mathrm{m} < z < 3\,\mathrm{m} \\ 3(z - 3\,\mathrm{m})\mathrm{kN} - 6\mathrm{kNm} & 3\,\mathrm{m} < z < 4\,\mathrm{m} \\ 3(z - 3\,\mathrm{m})\mathrm{kN} - 6\mathrm{kNm} & 4\,\mathrm{m} < z < 5\,\mathrm{m} \end{cases}$$





ESERCIZIO 2

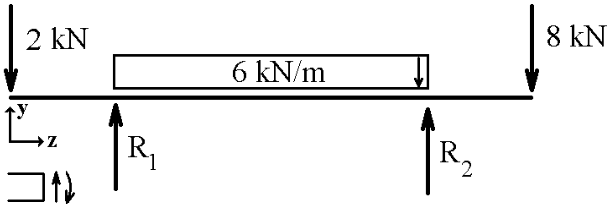
Si consideri la seguente struttura:



Determinare le espressioni e i grafici di taglio momento flettente.

SOLUZIONE

La struttura è isostatica e soggetta a carichi verticali; al posto dei vincoli vengono inserite le reazioni. Si imposta anche un riferimento e una convenzione per le azioni interne:

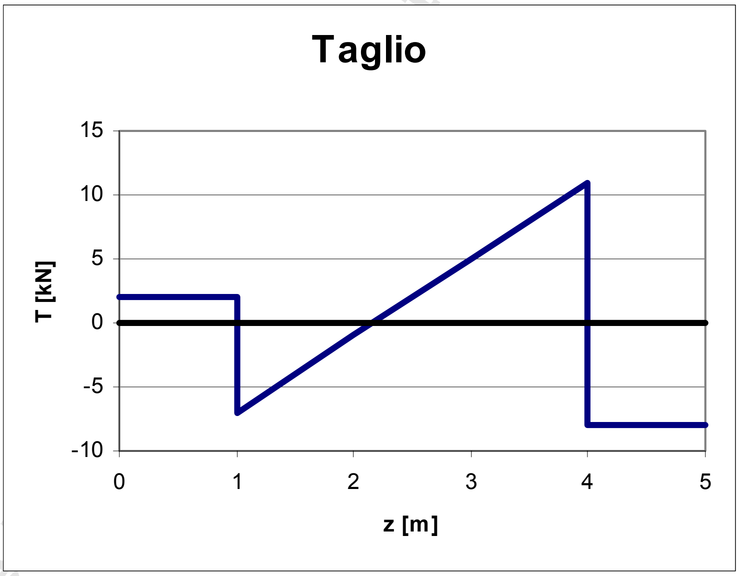


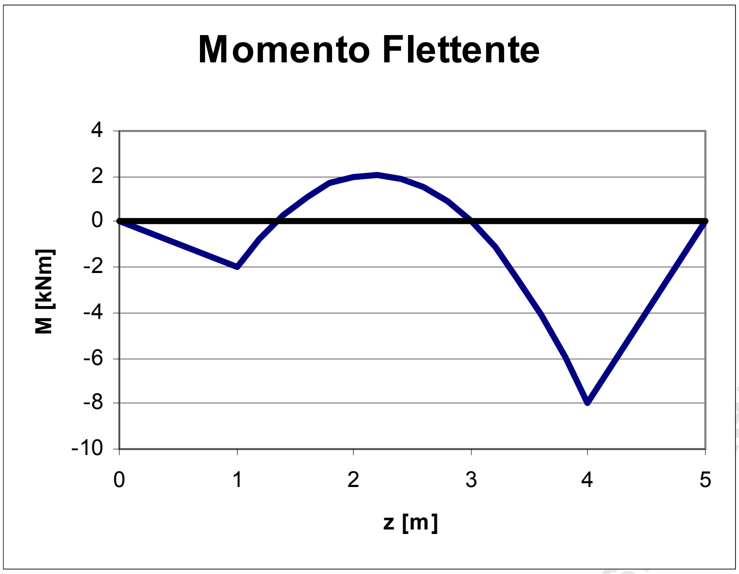
Dall'equilibrio ai momenti nel punto di applicazione di R_1si può scrivere:
$2 \cdot 1\,\text{kN} + 3R_2 - 1{,}5 \cdot 18\,\text{kN} - 4 \cdot 8\,\text{kN} = 0 \Rightarrow R_2 = 19\,\text{kN}$

Dall'equilibrio alla traslazione verticale:
$2\,\text{kN} + 8\,\text{kN} + 18\,\text{kN} = R_2 + R_1 \Rightarrow R_1 = 9\,\text{kN}$

A questo punto si possono ricavare taglio e azioni interne:

$$T_y = \begin{cases} 2\,\text{kN} \\ -13\,\text{kN} + 6z\,\text{kN/m} \\ -8\,\text{kN} \end{cases} \quad M_x = \begin{cases} -2z\,\text{kN} \\ -12\,\text{kNm} + 13z\,\text{kN} - 3z^2\,\text{kN/m} \\ -8\,\text{kNm} + 8z\,\text{kN} \end{cases} \quad \text{per} \quad \begin{matrix} 0 < z < 1\,\text{m} \\ 1\,\text{m} < z < 4\,\text{m} \\ 4\,\text{m} < z < 5\,\text{m} \end{matrix}$$

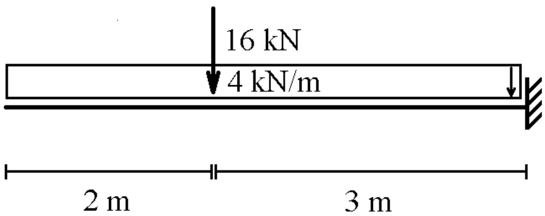




Si può facilmente ricavare che il taglio si annulla per z = 13/6 m, mentre il momento flettente si annulla in z = 4/3 m e in z = 3 m.

ESERCIZIO 3

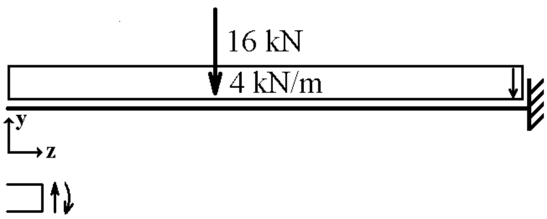
Si consideri la seguente struttura:



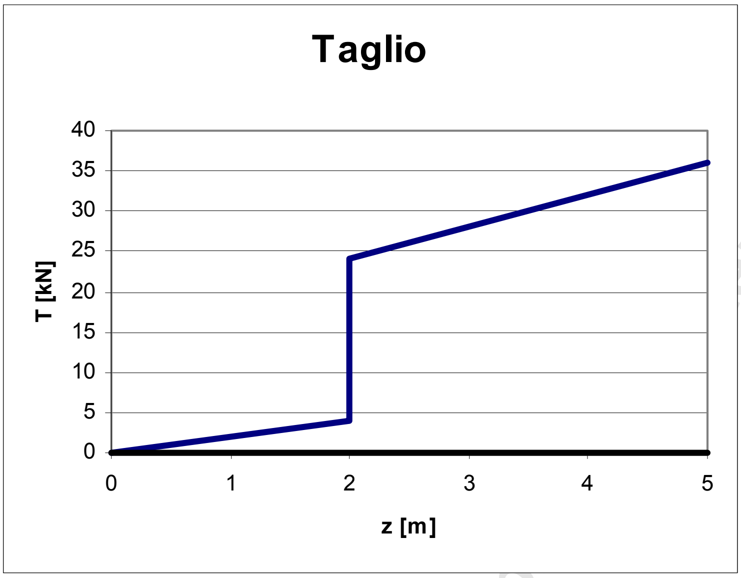
Determinare le espressioni e i grafici di taglio momento flettente.

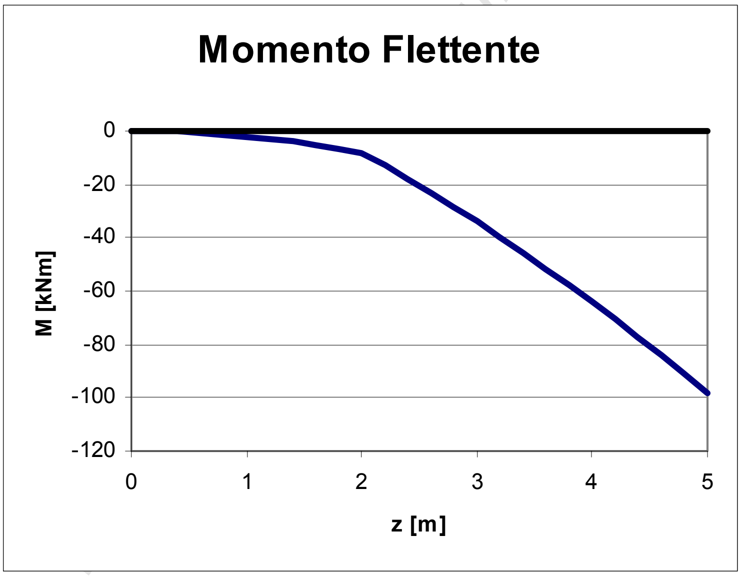
SOLUZIONE

La struttura è isostatica e soggetta a carichi verticali; non è necessario ricavare la reazione vincolare per disegnare il grafico delle azioni interne. Si imposta un riferimento e una convenzione per le azioni interne:



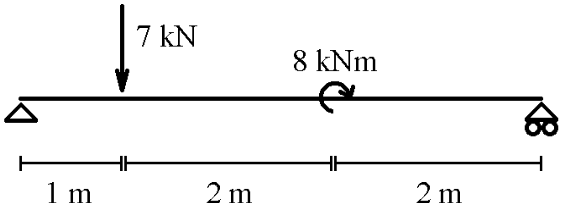
$$T_y = \begin{cases} 4z\ \text{kN/m} \\ 16\ \text{kN} + 4z\ \text{kN/m} \end{cases} \quad M_x = \begin{cases} -2z^2\ \text{kN/m} \\ -2z^2\ \text{kN/m} - 16(z-2)\ \text{kN} \end{cases} \quad \text{per} \quad \begin{matrix} 0 < z < 2\ \text{m} \\ 2\ \text{m} < z < 5\ \text{m} \end{matrix}$$





ESERCIZIO 4

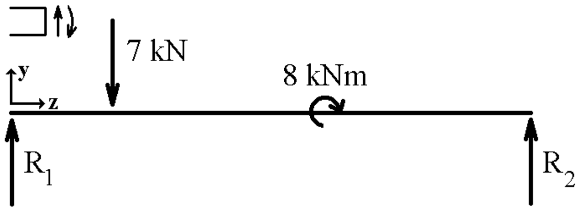
Si consideri la seguente struttura:



Determinare le espressioni e i grafici di taglio momento flettente.

SOLUZIONE

La struttura è isostatica e soggetta a carichi verticali e a un momento concentrato; al posto dei vincoli vengono inserite le reazioni. Si imposta anche un riferimento e una convenzione per le azioni interne:



Dall'equilibrio ai momenti nel punto di applicazione di R_1 si può scrivere:

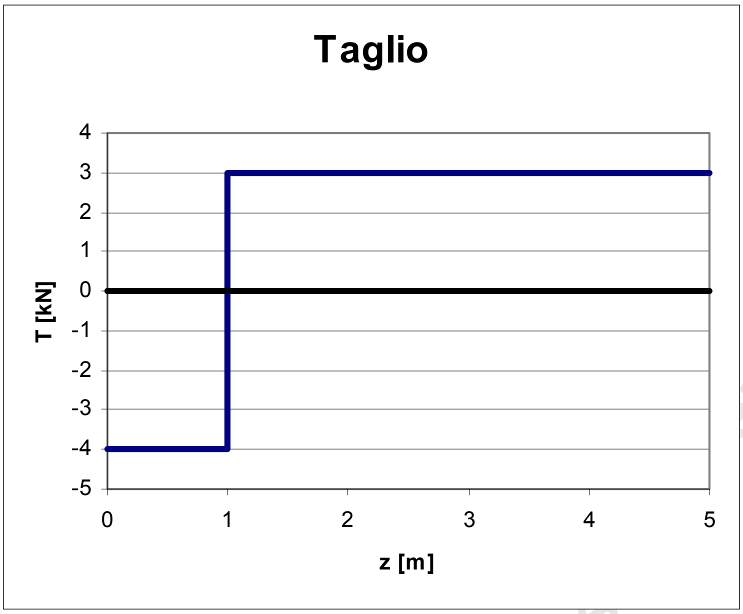
$$1 \cdot 7\,\text{kN} + 8\,\text{kN} - 5R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = 3\,\text{kN}$$

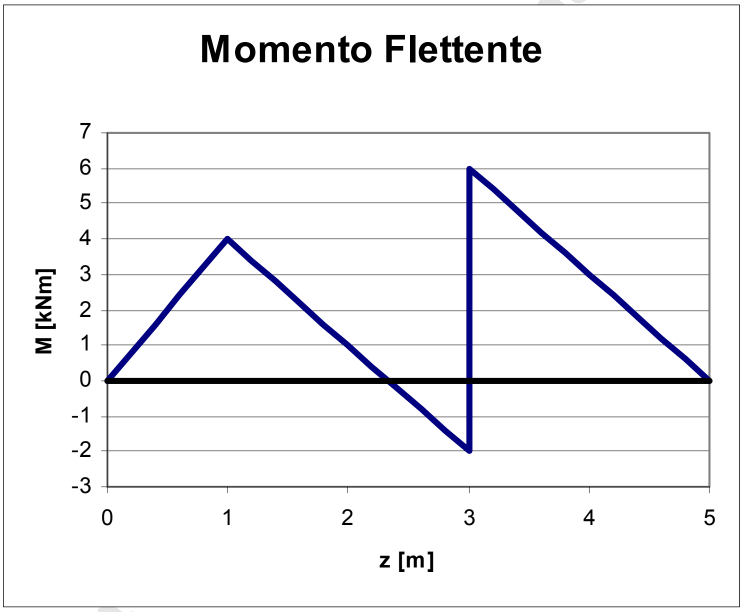
Dall'equilibrio alla traslazione verticale:

$$7\,\text{kN} = R_2 + R_1 \Rightarrow R_1 = 4\,\text{kN}$$

A questo punto si possono ricavare taglio e azioni interne:

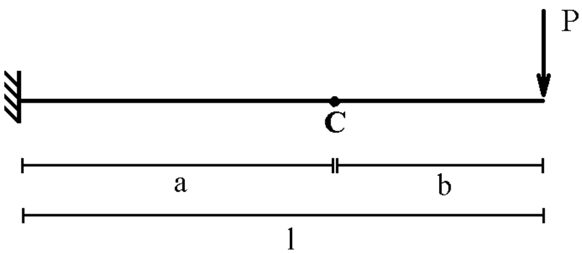
$$T_y = \begin{cases} -4\,\text{kN} \\ 3\,\text{kN} \\ 3\,\text{kN} \end{cases} \quad M_x = \begin{cases} 4z\,\text{kN} \\ 7\,\text{kNm} - 3z\,\text{kN} \\ 15\,\text{kNm} - 3z\,\text{kN} \end{cases} \quad \text{per} \quad \begin{matrix} 0 < z < 1\,\text{m} \\ 1\,\text{m} < z < 3\,\text{m} \\ 3\,\text{m} < z < 5\,\text{m} \end{matrix}$$





ESERCIZIO 5

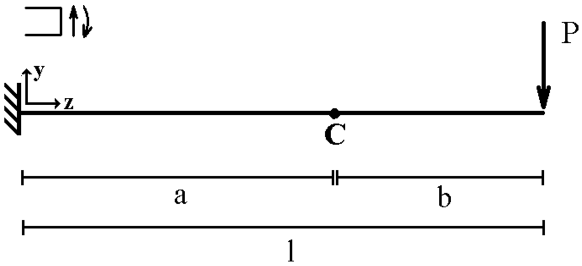
Si consideri la seguente struttura:



Determinare lo spostamento del punto **C**.

SOLUZIONE

La struttura è isostatica; per il calcolo dello spostamento risulta di immediata applicazione il metodo della linea elastica. Si adotta un riferimento ed una convenzione:



La scrittura delle azioni interne è immediata:

$$T_y = -P$$

$$M_x = P(z-l)$$

Gli spostamenti sulla linea, trascurando l'effetto del taglio, sono dati dall'espressione:

$$y = \frac{1}{EJ}\int_0^z \left(\int_0^z M_x dz + y'(0) \right) dz + y(0) = \frac{1}{EJ}\int_0^z \left(P\left(\frac{1}{2}z^2 - lz \right) + y'(0) \right) dz + y(0) =$$

$$= \frac{P\left(\frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{2}lz^2 \right) + y'(0) + y(0)}{EJ}$$

Dato che in $z = 0$ si trova un incastro, la condizione al contorno può essere posta come:

$$\begin{cases} y'(0) = 0 & \text{rotazione nulla in corrispondenza dell'incastro} \\ y(0) = 0 & \text{spostamento nullo in corrispondenza dell'incastro} \end{cases}$$

Per cui:

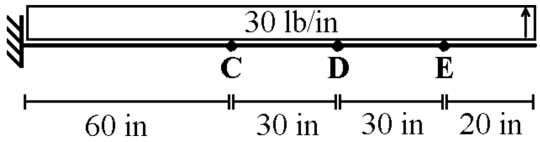
$$y = \frac{P\left(\frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{2}lz^2 \right)}{EJ}$$

In particolare, nel punto **C**:

$$y_C = \frac{P}{6EJ}\left(a^3 - 3la^2 \right)$$

ESERCIZIO 6

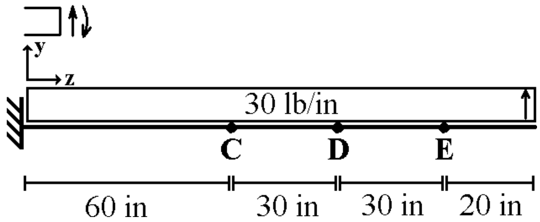
Si consideri la seguente struttura:



Determinare lo spostamento del punto **D** rispetto alla linea congiungente i punti **C** ed **E**.

SOLUZIONE

La struttura è isostatica, ancora una volta è conveniente l'uso del metodo della linea elastica. Si imposta una convenzione e un riferimento:



Il calcolo delle azioni interne è molto veloce, si ottiene:
$T_y = 4200 \text{ lb} - 30z \text{ lb/in}$

$M_x = 294000 \text{ lb} \cdot \text{in} - 4200z \text{ lb} + 15z^2 \text{ lb/in}$

Gli spostamenti sulla linea, trascurando l'effetto del taglio, sono dati dall'espressione:

$$y = \frac{1}{EJ}\int_0^z \left(\int_0^z M_x dz + y'(0) \right) dz + y(0) = \frac{1}{EJ}\left(147000z^2 \text{ lb} \cdot \text{in} - 700z^3 \text{ lb} + 1{,}25z^4 \text{ lb/in}\right)$$

L'espressione può essere valutata nei tre punti in esame:

$$y_C = \frac{3{,}942 \cdot 10^8 \text{ lb} \cdot \text{in}^3}{EJ}$$

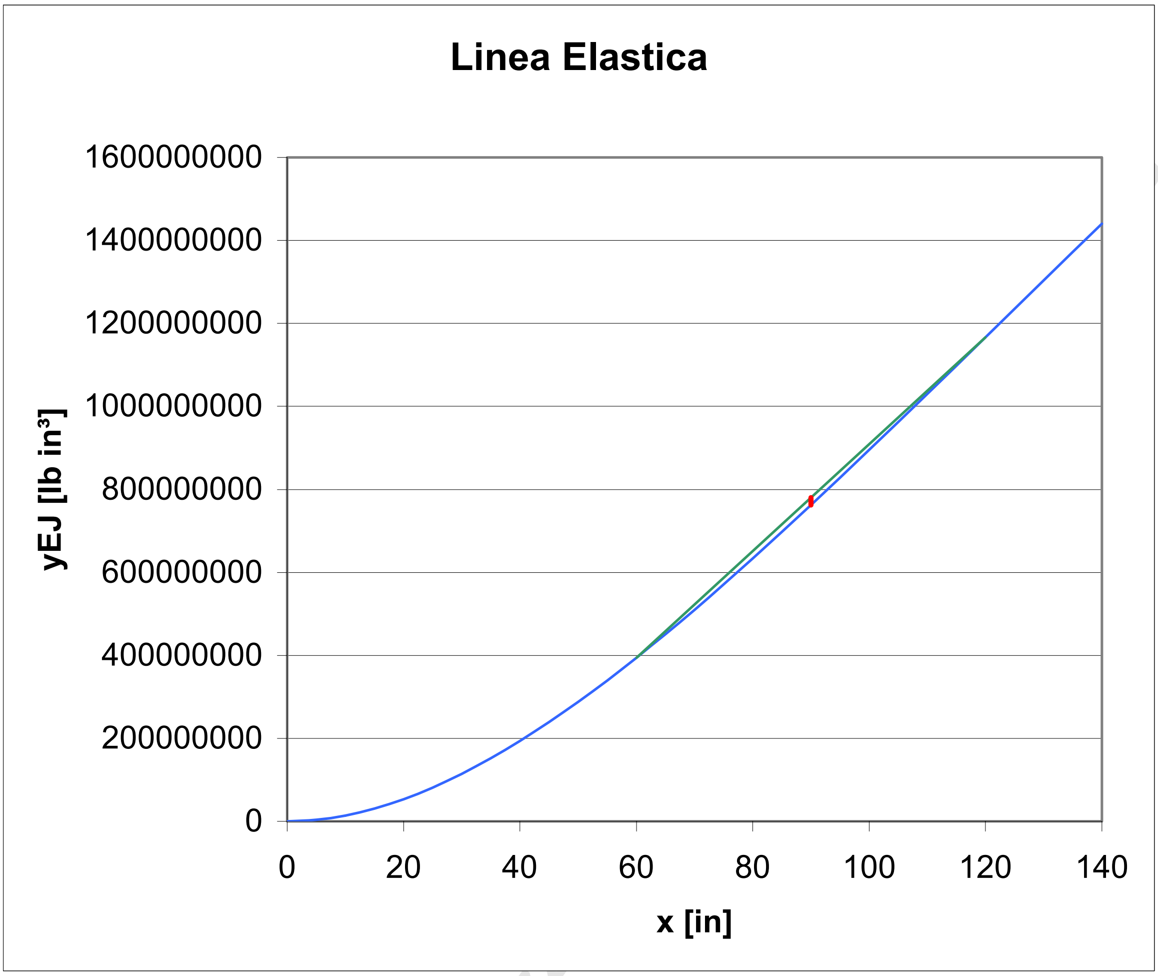
$$y_D = \frac{7{,}624 \cdot 10^8 \text{ lb} \cdot \text{in}^3}{EJ}$$

$$y_E = \frac{1{,}1664 \cdot 10^9 \text{ lb} \cdot \text{in}^3}{EJ}$$

La quantità richiesta è data dalla formula:

$$s = y_D - \frac{1}{2}\left(y_C + y_E\right) = \frac{1{,}79 \cdot 10^7 \text{ lb} \cdot \text{in}^3}{EJ}$$

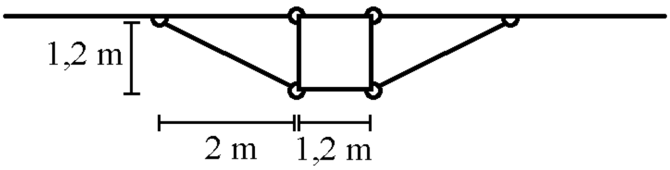
Il grafico che segue illustra il significato della quantità calcolata.



La linea blu rappresenta la trave che si sposta (ovviamente la scala è esagerata), la linea verde è la retta congiungente i punti **C** ed **E** e il tratto rosso è la distanza cercata.

ESERCIZIO 7

Si consideri un velivolo ad ala alta trapezoidale la cui struttura è schematizzabile nel modo illustrato:



Del velivolo sono noti:

- il peso: Q = 1600 kg
- la superficie alare: S = 16 m^2
- l'allungamento alare: λ = 7
- il rapporto di rastremazione: RR = 1,5

- il peso dell'ala: Q_{ALA} = dal 15 al 20 % di Q

Determinare le azioni interne sull'ala se il velivolo vola con un fattore di contingenza n pari a 4,5.

SOLUZIONE

In primo luogo conviene calcolare le caratteristiche dell'ala e del velivolo considerato. L'apertura alare è data dalla formula:

$$b = \sqrt{\lambda S} = 10{,}583\ \text{m}$$

Si può inoltre trovare un valore della corda media geometrica:

$$\bar{c} = \frac{S}{b} = 1{,}512\ \text{m}$$

Infine, essendo noto il rapporto di rastremazione, è possibile ricavare il valore delle corde in radice e in estremità d'ala. Essendo l'area dell'ala trapezoidale data da:

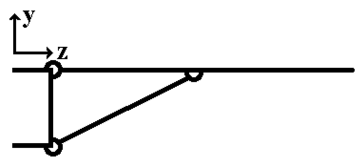
$$S = \frac{b}{2}\left(c_{rad} + c_{estr}\right) = \frac{b}{2} c_{estr}\left(\text{RR} + 1\right)$$

e quindi:

$$c_{estr} = \frac{2S}{b\left(\text{RR} + 1\right)} S = 1{,}210\ \text{m}$$

$$c_{rad} = c_{estr}\text{RR} = 1{,}814\ \text{m}$$

Essendo il problema simmetrico, è possibile considerare solo metà del velivolo. Assegnando per la semiala il riferimento in figura:



è possibile scrivere un'espressione analitica della corda come funzione di z:

$$c(z) = 1{,}814\ \text{m} - 0{,}114 z$$

A questo punto è necessario individuare i carichi agenti sull'ala. Si approssima che sull'ala l'andamento della portanza e delle forze di massa siano proporzionali alla corda stessa dell'ala (che equivale a dire che ogni tratto di ala di uguale superficie subisce gli stessi carichi complessivi). Inoltre, per avere una scelta conservativa, si considera che il peso dell'ala sia solo il 15 % del peso totale. La portanza totale per unità di superficie dovrà quindi essere (ignorando la deportanza dovuta alla coda):

$$\frac{L}{S} = \frac{nQ}{S} = 450\ \text{kg/m}^2$$

mentre le forze di massa (peso e inerzia) sull'ala saranno:

$$\frac{nQ_{ALA}}{S} = 67{,}5\ \text{kg/m}^2$$

La portanza viene parzialmente compensata dalle forze di massa sull'ala. Pertanto l'andamento del carico distribuito lungo la semiala sarà:

$$q(z)=c(z)\left(\frac{L}{S}-\frac{nQ_{ALA}}{S}\right)=c(z)\left(\frac{nQ}{S}-\frac{nQ_{ALA}}{S}\right)=693{,}9\ \text{kg/m}-43{,}6z\ \text{kg/m}^2$$

A questo punto è possibile calcolare le reazioni vincolari; rimuovendo i vincoli, siano rispettivamente H_1 e V_1 le componenti orizzontale e verticale della reazione in corrispondenza della cerniera ala-fusoliera e H_2 e V_2 quelle in corrispondenza della controventatura.

Per l'equilibrio alla rotazione sulla prima cerniera si può scrivere:

$$-2V_2\ \text{m}=\int_{0,6\ \text{m}}^{5,29\ \text{m}}\left(693{,}9\ \text{kg/m}-43{,}6z\ \text{kg/m}^2\right)(z-0{,}6\ \text{m})dz=5838{,}0\ \text{kgm}\Rightarrow V_2=-2919\ \text{kg}$$

dove V_2 è intesa positiva verso l'alto.

Per l'equilibrio alla traslazione verticale:

$$V_1+V_2+\int_{0,6\ \text{m}}^{5,29\ \text{m}}\left(693{,}9\ \text{kg/m}-43{,}6z\ \text{kg/m}^2\right)dz=0\Rightarrow V_1=269{,}6\ \text{kg}$$

Dato che la controventatura è una biella, si può scrivere:

$$\frac{V_2}{H_2}=\frac{1{,}2}{2}\Rightarrow H_2=-4865\ \text{kg}$$

Se si ritiene che la fusoliera sia infinitamente rigida (molto più rigida del tratto interno di ala), si può ritenere che l'azione assiale generata da questa reazione vincolata si scarichi tutta sulla prima cerniera:

$$H_1=4865\ \text{kg}$$

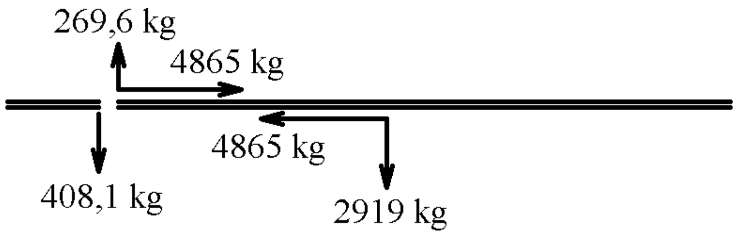
Infatti il sitema è iperstatico rispetto alla traslazione orizzontale.

Per quanto riguarda invece il tratto centrale di ala, sfruttando la simmetria e l'equilibrio alla traslazione si può scrivere:

$$V_3+\int_{0}^{0,6\ \text{m}}\left(693{,}9\ \text{kg/m}-43{,}6z\ \text{kg/m}^2\right)dz=0\Rightarrow V_3=-408{,}1\ \text{kg}$$

dove V_3 è la reazione verticale in corrispondenza della cerniera.

Il disegno di seguito riassume brevemente le reazioni vincolari calcolate.

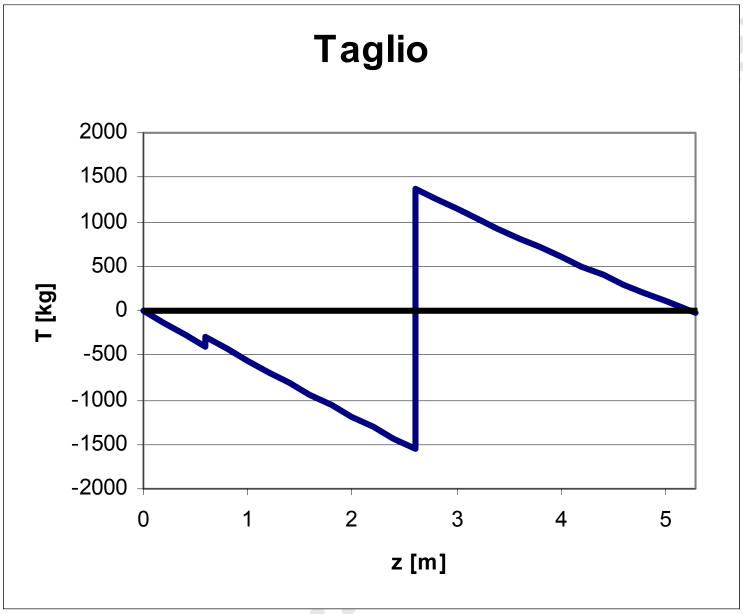


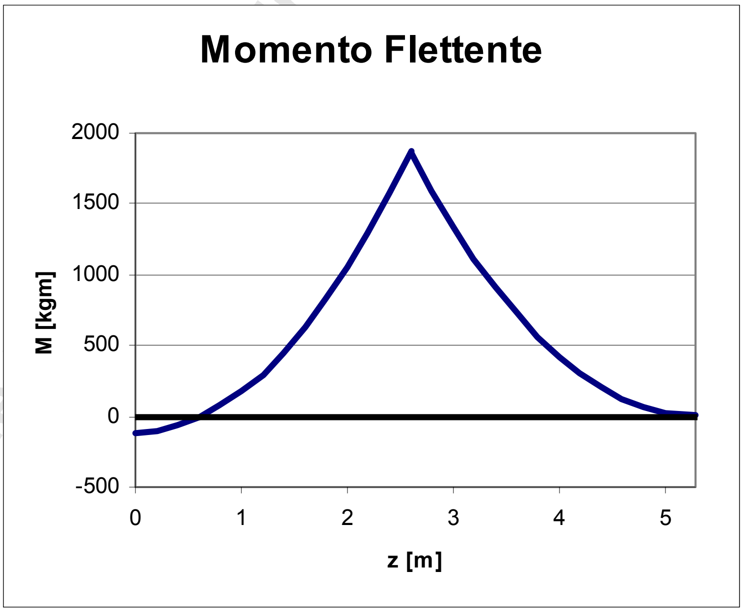
Si può verificare la consistenza del risultato ottenuto in questo modo: la somma delle reazioni vincolari verticali sull'ala moltiplicate per 2 dà il peso del velivolo ala esclusa.

Ora si ha tutto il necessario per calcolare le azioni interne sulla semiala, a partire dall'incastro.

$$T_y = \begin{cases} -693{,}9z\ \text{kg/m} + 21{,}8z^2\ \text{kg/m}^2 & 0 < z < 0{,}6\ \text{m} \\ 111{,}9\ \text{kg} - 693{,}9z\ \text{kg/m} + 21{,}8z^2\ \text{kg/m}^2 \quad \text{per} & 0{,}6\ \text{m} < z < 2\ \text{m} \\ 3030{,}9\ \text{kg} - 693{,}9z\ \text{kg/m} + 21{,}8z^2\ \text{kg/m}^2 & 2\ \text{m} < z < 5{,}29\ \text{m} \end{cases}$$

$$M_x = \begin{cases} 347{,}0z^2\ \text{kg/m} - 7{,}3z^3\ \text{kg/m}^2 - 123{,}3\ \text{kgm} & 0 < z < 0{,}6\ \text{m} \\ -56{,}2\ \text{kgm} - 111{,}9z\ \text{kg} + 347{,}0z^2\ \text{kg/m} - 7{,}3z^3\ \text{kg/m}^2 \quad \text{per} & 0{,}6\ \text{m} < z < 2\ \text{m} \\ 7533{,}2\ \text{kgm} - 3030{,}9z\ \text{kg} + 347{,}0z^2\ \text{kg/m} - 7{,}3z^3\ \text{kg/m}^2 & 2\ \text{m} < z < 5{,}29\ \text{m} \end{cases}$$





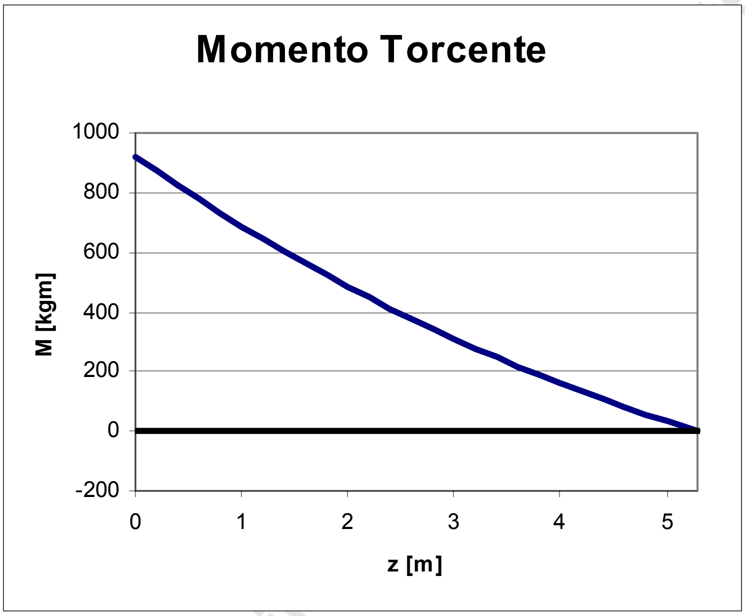
Per quanto riguarda il momento torcente, prima di procedere è necessario avanzare alcune ulteriori ipotesi. La prima ipotesi è sulla forma dell'ala; si sceglie un'ala a forma di trapezio isoscele. Le altre ipotesi riguardano la distribuzione del carico lungo la corda: si può pensare che il peso sia applicato sul punto medio della corda, mentre la portanza a 2/3 dal bordo d'attacco (che equivale a dire distribuzione di pressione triangolare). Se come linea di riferimento si sceglie la mediana, l'effetto del peso viene ad essere nullo e l'espressione del momento torcente può essere scritta come:

$$M_z = M_{z0} - \int_0^z \left(\frac{693{,}9\ \mathrm{kg/m} - 43{,}6z'\ \mathrm{kg/m^2}}{0{,}85} \right)\left(\frac{1{,}814\ \mathrm{m} - 0{,}114z'}{6} \right) dz' =$$

$$= M_{z0} - 0{,}325z^3\ \mathrm{kg/m^2} + 15{,}5z^2\ \mathrm{kg/m} - 246{,}6z\ \mathrm{kg}$$

Ponendo che all'estremità tale momento sia nullo si ottiene:

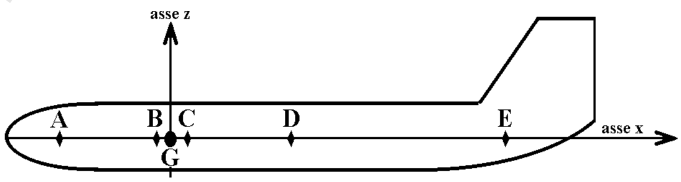
$$M_z = 918{,}6\ \mathrm{kgm} - 0{,}325z^3\ \mathrm{kg/m^2} + 15{,}5z^2\ \mathrm{kg/m} - 246{,}6z\ \mathrm{kg}$$



ESERCIZIO 8

Calcolare le sollecitazioni su fusoliera e impennaggio verticale per un velivolo soggetto a raffica laterale.
La velocità del velivolo è $v = 80$ m/s, mentre la velocità della raffica sia $v_r = 10$ m/s.

Il velivolo è schematizzato come un insieme di masse concentrate:

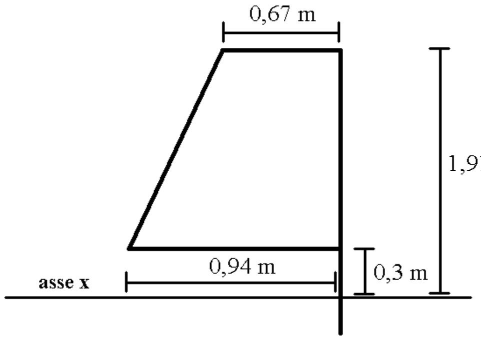


Sia **G** il baricentro delle masse concentrate illustrate in figura. Tali masse racchiudono tutta la massa del velivolo ad eccezione dell'impennaggio verticale.

Le coordinate X (misurate a partire da **G**) e le entità delle masse sono:
A: $m_A = 160$ kg, $x_A = -1{,}52$ m

B: $mB = 350$ kg, $x_B = -0,165$ m
C: $mC = 220$ kg, $x_C = 0,275$ m
D: $mD = 30$ kg, $x_D = 1,725$ m
E: $mE = 40$ kg, $x_E = 4,725$ m
La coordinata Z è nulla per tutte.

A queste si aggiunge la deriva, del peso di 40 kg e il cui bordo d'uscita è a 5,5 m da **G**. Le caratteristiche geometriche della deriva sono rappresentate in figura:



Si stimi che la deriva abbia una massa per unità di superficie uniforme e che anche la portanza sia uniformemente distribuita.

I momenti d'inerzia noti sono:
$J_{x\,ALA} = J_{z\,ALA} = 900$ kg m^2
$J_{x\,FUS} = 180$ kg m^2

Le derivate del coefficiente di portanza (laterale) sono:
$c_{L/\alpha\,FUS} = 0,002$ 1/° = 0,1146 1/rad
$c_{L/\alpha\,DER} = 0,04$ 1/° = 2,2919 1/rad

La superficie laterale della fusoliera è $S_{FUS} = 4,9$ m^2.

SOLUZIONE

Per prima cosa è necessario calcolare le caratteristiche inerziali del velivolo completo, cioè con l'aggiunta della deriva. E' quindi necessario calcolare il baricentro di tale deriva, con l'ipotesi fatta di massa per unità di superficie uniforme.

La legge delle corde della deriva sarà:
$$c(z) = 0,9903\,\mathrm{m} - 0,1677z$$
Integrando o semplicemente dalla formula dell'area del trapezio si ricava la superficie della deriva:
$$S = 1,296\,\mathrm{m}^2$$
Essendo la massa per unità di superficie costante, si possono ricavare le posizioni del baricentro della deriva dalle formule:

$$\begin{cases} x_{GD} = 5{,}5\ \text{m} - \dfrac{\int_{0,3\ \text{m}}^{1,91\ \text{m}} \frac{1}{2} c^2(z)\, dz}{S} \\ z_{GD} = \dfrac{\int_{0,3\ \text{m}}^{1,91\ \text{m}} c(z) z\, dz}{S} \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} x_{GD} = 5{,}0937\ \text{m} \\ z_{GD} = 1{,}0600\ \text{m} \end{cases}$$

A questo punto è possibile calcolare la posizione del nuovo baricentro **G'**, con la consueta formula della media pesata:

$$\begin{cases} x_{G'} = \dfrac{\sum_i m_i x_{Gi}}{\sum_i m_i} = 0{,}2431\ \text{m} \\ z_{G'} = \dfrac{\sum_i m_i z_{Gi}}{\sum_i m_i} = 0{,}05050\ \text{m} \end{cases}$$

A partire da questo nuovo baricentro si possono riscrivere le coordinate di tutti i punti (mantenendo gli assi paralleli):

	x' [m]	z' [m]	massa [kg]
A	-1,7631	-0,0505	160
B	-0,4081	-0,0505	350
C	0,0319	-0,0505	220
D	1,4819	-0,0505	30
E	4,4819	-0,0505	40
F (deriva)	4,8542	1,0095	40

Si può anche traslare la legge delle corde per renderla valida la nuovo asse:

$$c(z') = 0{,}9818\ \text{m} - 0{,}1677 z$$

D'ora in poi gli apici saranno omessi per brevità.

Si calcolano ora i momenti d'inerzia baricentrici rispetto ai due assi considerati. Tali grandezza saranno date dal momento d'inerzia delle masse concentrate più il momento d'inerzia intrinseco delle parti coinvolte, vale a dire:

$$\begin{cases} J_x = J_{x\,ALA} + J_{x\,FUS} + \sum_i m_i z_{Gi}^2 = 1122{,}8\ \text{kg m}^2 \\ J_z = J_{z\,ALA} + \sum_i m_i x_{Gi}^2 = 3267{,}8\ \text{kg m}^2 \end{cases}$$

In realtà questi non sono i momenti principali d'inerzia; infatti è possibile calcolare:

$$J_{xz} = +\sum_i m_i z_{Gi} x_{Gi} = 205{,}8\ \text{kg m}^2$$

il che significa che gli assi principali d'inerzia sono ruotati di un angolo:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2 J_{xz}}{J_z - J_x} \right) = 5{,}43°$$

Per semplicità si tralascia di ruotare gli assi.

Ora è necessario calcolare le forze che agiscono sul velivolo; si tratta di:
- forze aerodinamiche
- forze di massa dovute alle accelerazioni laterali indotte dalla raffica.

Sull'impennaggio si avrà una forza laterale (diretta come Y) pari a:

$$F_D = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 c_{L/\alpha\, DER}\alpha S \cong \frac{1}{2}\rho_0 v^2 c_{L/\alpha\, DER}\frac{v_r}{v}S = \frac{1}{2}\rho_0 v v_r c_{L/\alpha\, DER} S = 1455{,}4\ \text{N}$$

Il punto di applicazione di tale forza, se si suppone una distribuzione di portanza triangolare, sarà:

$$\begin{cases} x_{FD} = 5{,}5\ \text{m} - 0{,}2431\ \text{m} - \dfrac{\int_{0,3\,\text{m}}^{1,91\,\text{m}} \frac{2}{3} c^2(z)\, dz}{S} = 4{,}7152\ \text{m} \\ z_{FD} = \dfrac{\int_{0,3\,\text{m}}^{1,91\,\text{m}} c(z) z\, dz}{S} - 0{,}0505\ \text{m} = 1{,}0095\ \text{m} \end{cases}$$

Avendo calcolato il punto di applicazione è possibile trovare i due momenti della forza secondo i due assi:

$$\begin{cases} M_x = F_D z_{FD} = 1469{,}2\ \text{Nm} \\ M_z = F_D x_{FD} = 6862{,}5\ \text{m} \end{cases}$$

Sulla fusoliera la forza laterale sarà:

$$F_F = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 c_{L/\alpha\, FUS}\alpha S_{FUS} \cong \frac{1}{2}\rho_0 v v_r c_{L/\alpha\, FUS} S_{FUS} = 275{,}1\ \text{N}$$

La forza è supposta essere applicata al baricentro e quindi non genera momenti.

Le forze e i momenti generano accelerazioni, lineari e angolari:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \dfrac{M_x}{J_x} = 1{,}309\ \text{rad/s}^2 \\ \dot{\omega}_z = \dfrac{M_z}{J_z} = 2{,}100\ \text{rad/s}^2 \\ a_y = \dfrac{F_D + F_F}{m_{tot}} = 2{,}060\ \text{m/s}^2 \end{cases}$$

Queste accelerazioni determinano delle forze d'inerzia dirette come Y sulle masse concentrate, secondo la legge:

$$\left(F_I\right)_i = m_i a_y + m_i \dot{\omega}_z x_{Gi}$$

La tabella di seguito illustra le forze concentrate sulle masse.

	m_i [kg]	x_{Gi} [m]	z_{Gi} [m]	$a_y m_i$	$\dot{\omega}_z x_{Gi}$	$totale$ [N]
A	160	-1,7631	-0,0505	329,6	-592,4	-262,8
B	350	-0,4081	-0,0505	721,0	-299,9	421,1
C	220	0,0319	-0,0505	453,2	14,7	467,9
D	30	1,4819	-0,0505	61,8	93,4	155,2
E	40	4,4819	-0,0505	82,4	376,5	458,9
F	40	4,8542	1,0095	82,4	407,8	490,2

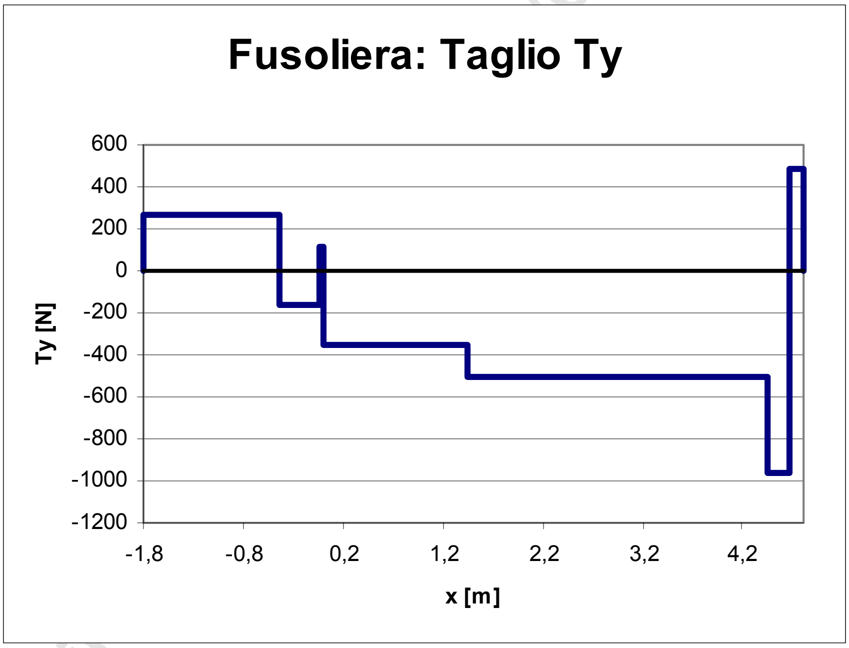
Riassumendo, nella situazione in considerazione, le forze in gioco sulla fusoliera sono:

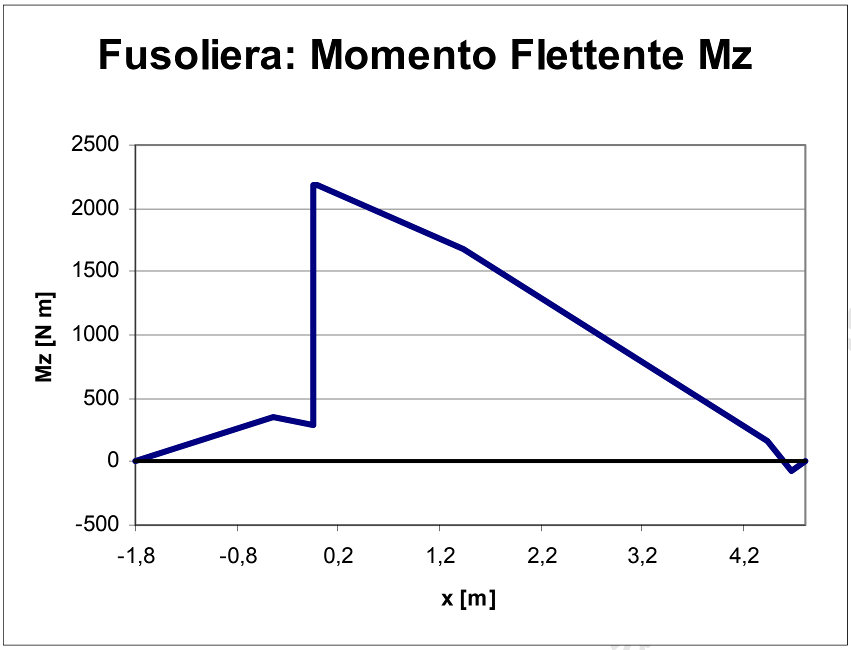
	forza [N]	x [m]	z [m]	M_z [Nm]
forza d'inerzia su A	-262,8	-1,7631	-0,0505	463,3
forza d'inerzia su B	421,1	-0,4081	-0,0505	-171,8
forza aerodinamica sulla fusoliera	-275,1	0,0000	0,0000	0
forza d'inerzia su C	467,9	0,0319	-0,0505	14,9
forza d'inerzia su D	155,2	1,4819	-0,0505	229,9
forza d'inerzia su E	458,9	4,4819	-0,0505	2056,6
forza aerodinamica sulla deriva	-1455,4	4,7152	1,0095	-6862,5
forza d'inerzia su F	490,2	4,8542	1,0095	2379,3

momento flettente concentrato	0	0	0	1890,0

alle forze è stato aggiunto un "momento flettente concentrato" dovuto all'inerzia dell'ala; lo si può pensare come una reazione vincolare introdotta dall'incastro fra ala e fusoliera. Si può verificare che la somma di forze e momenti dà come risultato zero, per cui si ha conferma della correttezza dei conti fatti (cioè, le forze sono equilibrate).

E' ora possibile ricavare i grafici di taglio e momento flettente.

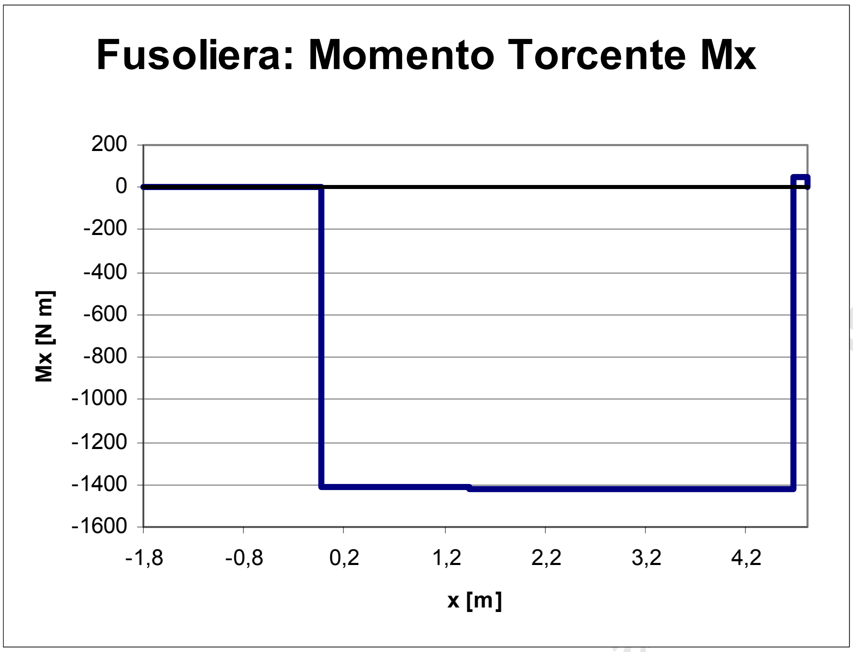




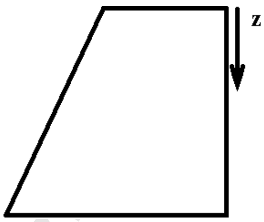
Quanto al momento torcente, si considerano le sollecitazioni indotte dalla rotazione attorno all'asse X, includendo un ulteriore momento torcente concentrato dovuto all'inerzia dell'ala e della fusoliera in corrispondenza del baricentro. Si ha:

	x [m]	z [m]	M_x [Nm]
forza d'inerzia su A	-1,7631	-0,0505	0,5
forza d'inerzia su B	-0,4081	-0,0505	1,2
forza aerodinamica sulla fusoliera	0,0000	0,0000	0
forza d'inerzia su C	0,0319	-0,0505	0,7
forza d'inerzia su D	1,4819	-0,0505	0,1
forza d'inerzia su E	4,4819	-0,0505	0,1
forza aerodinamica sulla deriva	4,7152	1,0095	-1469,2
forza d'inerzia su F	4,8542	1,0095	53,3

momento torcente concentrato	0	0	1413,2



Si procede ora con le considerazioni sulla deriva; per comodità è meglio impostare un nuovo riferimento Z che parta dall'estremità superiore dell'impennaggio:



La legge delle corde diventa quindi:

$$c(z) = 0{,}67\ \mathrm{m} + 0{,}1677z$$

Considerando le forze laterali, su ogni "fettina" di deriva agiscono una forza aerodinamica ed una forza di massa dovuta all'accelerazione lineare e attorno all'asse X:

$$q_A = c(z)\frac{F_A}{S}$$

$$q_M = -c(z)\frac{m_D}{S}\left((1{,}8595\ \mathrm{m} - z)\dot{\omega}_x + a_y\right)$$

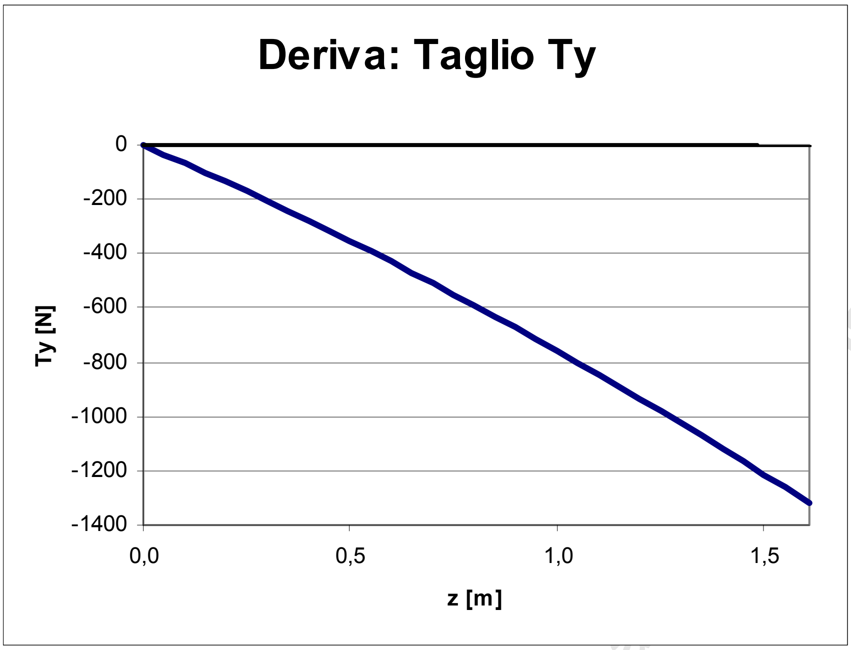
Il carico laterale totale sarà quindi:

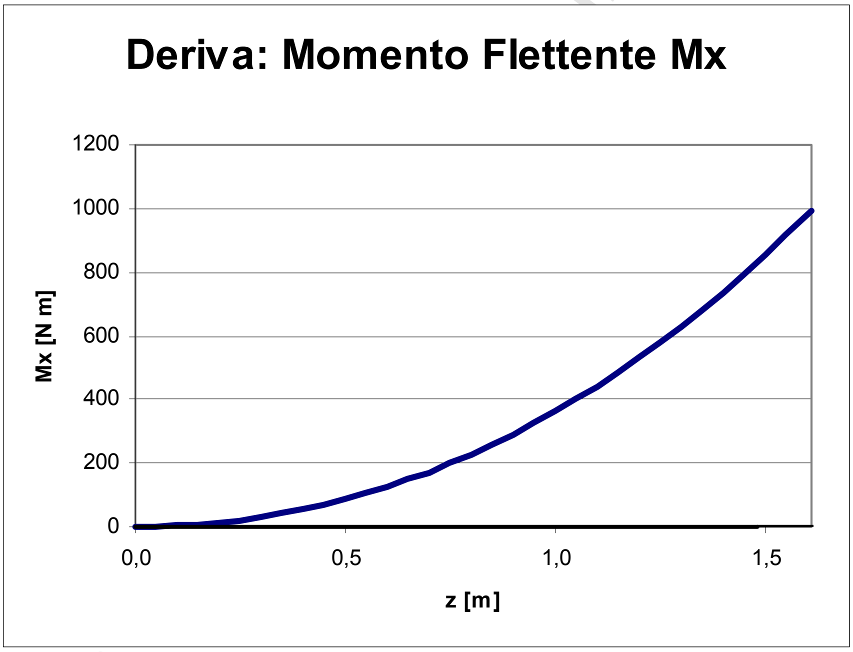
$$q_y = \frac{c(z)}{S}\left(F_A - m_D\left((1{,}8595\ \mathrm{m} - z)\dot{\omega}_x + a_y\right)\right) = 6{,}775z^2\ \mathrm{N/m^3} + 192{,}133z\ \mathrm{N/m^2} + 659{,}472\ \mathrm{N/m}$$

da cui:

$$T_y = -2{,}258z^3\ \mathrm{N/m^3} - 96{,}067z^2\ \mathrm{N/m^2} - 659{,}472z\ \mathrm{N/m}$$

$$M_x == 0{,}565z^4\ \mathrm{N/m^3} + 32{,}022z^3\ \mathrm{N/m^2} + 329{,}736z^2\ \mathrm{N/m}$$





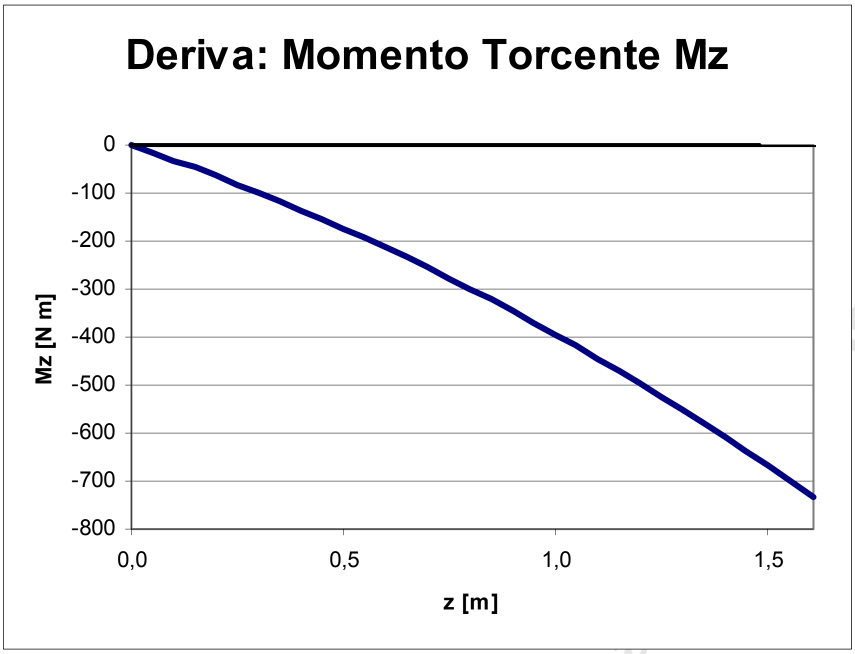
Quanto al momento torcente, se si prende come riferimento il bordo d'uscita si può scrivere:

$$m_z = \frac{c^2(z)}{S}\left(\frac{2}{3}F_A - \frac{1}{2}m_D\left((1{,}8595\,\mathrm{m} - z)\dot{\omega}_x + a_y\right)\right) =$$

$$= 0{,}568z^3 \text{ N/m}^3 + 23{,}645z^2 \text{ N/m}^2 + 161{,}721z \text{ N/m} + 304{,}941\,\text{N}$$

Per cui integrando si ottiene:

$$M_z = -0{,}142z^4 \text{ N/m}^3 - 7{,}882z^3 \text{ N/m}^2 - 80{,}861z^2 \text{ N/m} - 304{,}941z \text{ N}$$

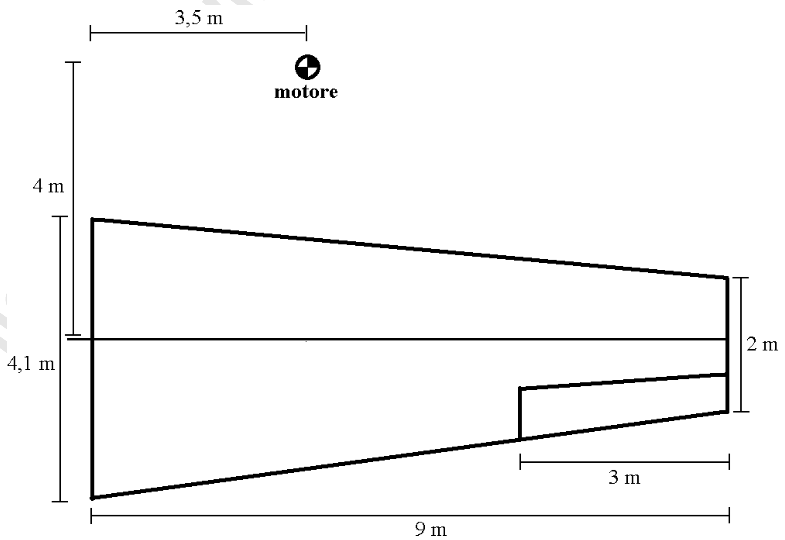


ESERCIZIO 9

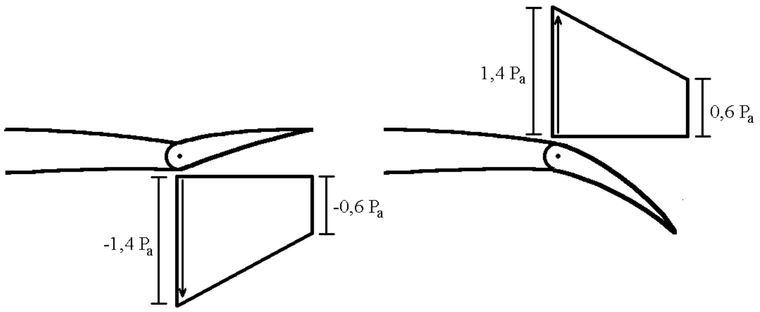
Si consideri l'ala di un velivolo nella situazione di una manovra di alettoni incipiente.

La massa del velivolo è di 10000 kg, quella dell'ala di 1500 kg. L'aereo ha ue motori montati in gondole subalari del peso di 1200 kg l'uno.

La pianta alare è a forma trapezoidale, come in figura; l'asse retto si trova al 40 % della corda a partire dal bordo d'attacco; il motore è considerato come una massa concentrata posizionata nel punto indicato.



Gli alettoni coprono 3 m della semiapertura alare e si estendono localmente per il 30 % della corda. Il carico dovuto alla deflessione degli alettoni sia approssimato con una distribuzione trapezoidale di pressione come in figura, dove P_a = 55 kg/m^2.

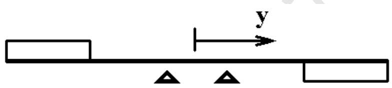


Il momento d'inerzia della fusoliera (e impennagi, ecc) rispetto all'asse di rollio è il 20 % del rispettivo momento d'inerzia dell'ala. Il vincolo fra ala e fusoliera è scematizzabile come due appoggi posti a 1,25 m dalla mezzeria.

Calcolare le sollecitazioni sull'ala; per quanto riguarda il momento torcente si calcoli soltanto la sollecitazione causata dalla manovra di alettoni.

SOLUZIONE

Per prima cosa conviene segnare un riferimento come in figura:



L'alettone abbassato si trova quindi nella direzione positiva delle Y.

Ora si può trovare la superficie alare e scrivere la legge che descrive l'andamento delle corde; si ricava immediatamente che:

$$S = \frac{1}{2} b \left(c_{MAX} + c_{MIN} \right) = 54{,}9 \text{ m}^2$$

$$c(y) = 4{,}1 \text{ m} - 0{,}2333 |y|$$

Ipotizzando che la massa dell'ala sia distribuita uniformamente sulla superficie, è possibile calcolare il momento d'inerzia dell'ala rispetto all'asse di rollio:

$$J_{X\,ALA} = 2 \frac{Q_{ALA}}{S} \int_0^{9\text{ m}} y^2 c(y) dy = 33531{,}6 \text{ kg m}^2$$

da cui, secondo i dati:

$$J_{X\,FUS} = 0{,}2 J_{X\,ALA} = 6706{,}3 \text{ kg m}^2$$

Rimane solo il momento d'inerzia dei motori:

$$J_{X\,MOT} = 2 Q_{MOT} (3{,}5 \text{ m})^2 = 29400 \text{ kg m}^2$$

Si consideri ora l'alettone. Il carico totale addizionale (in modulo) dovuto all'alettone è pari a:

$$|q_A(c)| = 0{,}3c \frac{(0{,}6 + 1{,}4)}{2} P_a = 0{,}3 P_a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |q_A(y)| = 0{,}3 P_a \left(4{,}1 \text{ m} - 0{,}2333 |y| \right) \text{per } 6 \text{ m} \le |y| \le 9 \text{ m}$$

Integrando si ottiene il momento di rollio dato dagli alettoni:

$$M_x = 2\int_{6\,\mathrm{m}}^{9\,\mathrm{m}} q_A(y) y \, dy = 2\int_{6\,\mathrm{m}}^{9\,\mathrm{m}} 0{,}3 P_a (4{,}1\,\mathrm{m} - 0{,}2333 y) y \, dy = 1727{,}73\,\mathrm{kg\,m}$$

Ora è possibile calcolare l'accelerazione angolare del velivolo, che servirà per trovare le forze d'inerzia:

$$\dot{\omega}_x = \frac{M_x}{J_{X\,ALA} + J_{X\,FUS} + J_{X\,MOT}} = 0{,}2434\,\mathrm{rad/s^2}$$

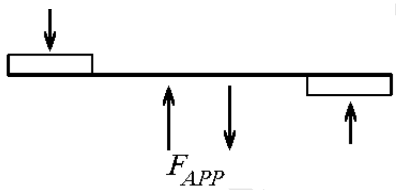
In particolare, la fusoliera eserciterà tramite gli appoggi una coppia d'inerzia; tale coppia sarà esercitata attraverso due forze uguali ed opposte. E' possibile ricavare l'entità di tali forze dall'equazione:

$$M_{FUS} = \dot{\omega}_x J_{X\,FUS} = 2 \cdot 1{,}25\,\mathrm{m} \cdot F_{APP} \Rightarrow F_{APP} = 66{,}55\,\mathrm{kg}$$

Allo stesso modo si potranno calcolare le forze d'inerzia dovute ai motori:

$$F_{MOT} = \dot{\omega}_x Q_{MOT} = 104{,}20\,\mathrm{kg}$$

La situazione è quella in figura:



Per calcolare le sollecitazioni di taglio e momento flettente è necessario ricavare anche il carico sull'ala indipendente dagli alettoni. Tale carico sarà dato da forze di massa (peso e forze d'inerzia) e aerodinamiche.

Peso:

$$q_P = -\frac{Q_{ALA}}{S} c(y)$$

Inerzia:

$$q_I = -y\dot{\omega}_x \frac{Q_{ALA}}{S} c(y)$$

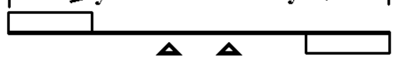
Aerodinamiche:

$$q_A = \frac{Q_{ALA} + Q_{FUS} + 2Q_{MOT}}{S} c(y)$$

Il carico totale sarà dunque:

$$q(y) = \left(\frac{Q_{FUS} + 2Q_{MOT}}{S} - y\dot{\omega}_x \right) c(y)$$

Per integrare conviene partire dalle estremità alari; pertanto si definiscono due diversi riferimenti come in figura:



In questo modo l'integrazione parte da zero e può essere condotta indipendentemente per le due semiali:

$$q'(y') = \left(\frac{Q_{FUS} + 2Q_{MOT}}{S} - \left(\frac{b}{2} - y' \right) \dot{\omega}_x \right) (2\,\mathrm{m} + 0{,}2333y')$$

$$q''(y'') = \left(\frac{Q_{FUS} + 2Q_{MOT}}{S} + \left(\frac{b}{2} - y'' \right) \dot{\omega}_x \right) (2\,\mathrm{m} + 0{,}2333y'')$$

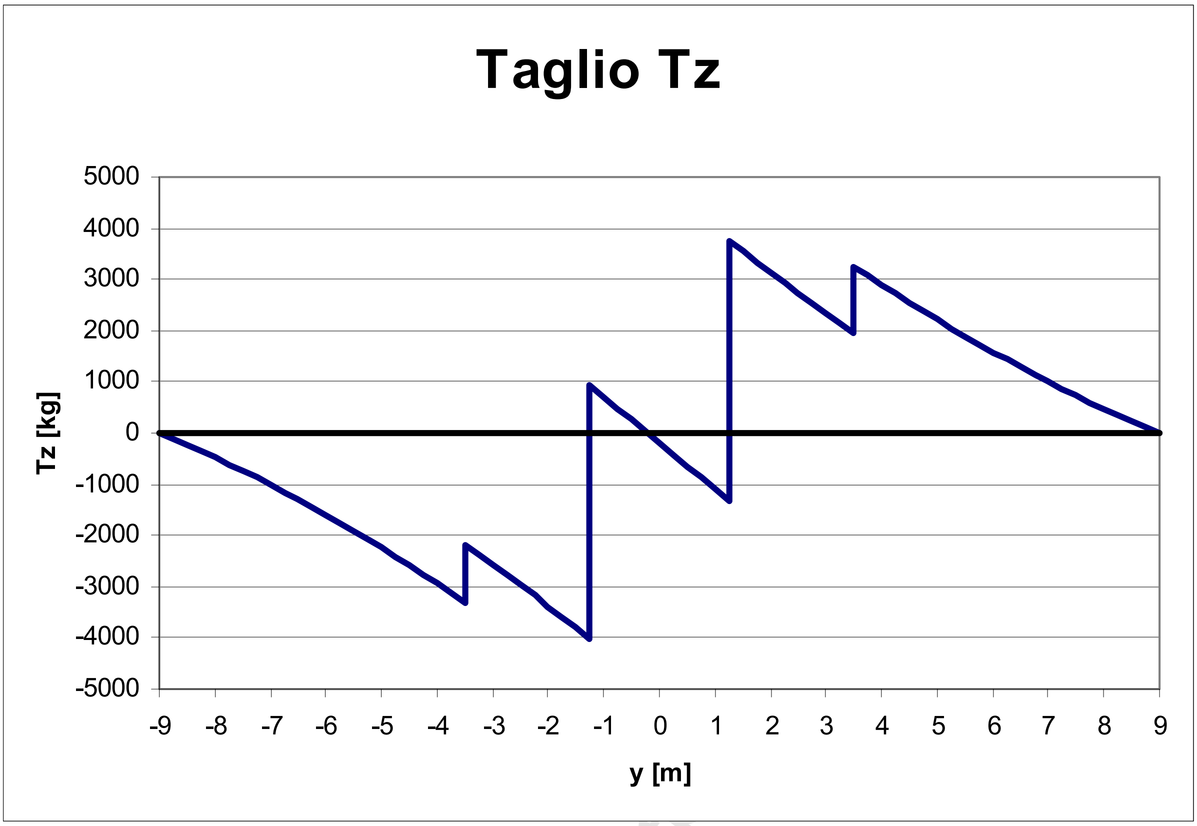
Prima di procedere si deve ricordare che in presenza dell'incastro e delle gondole motori ci saranno le forze concentrate calcolate in precedenza. Si ottiene quindi:

$$T_z' = \begin{cases} -0{,}018928y'^3\ \mathrm{kg/m^3} - 26{,}335y'^2\ \mathrm{kg/m^2} - 447{,}349y'\ \mathrm{kg/m} & \text{per } 0 \le y' < 5{,}5\,\mathrm{m} \\ -0{,}018928y'^3\ \mathrm{kg/m^3} - 26{,}335y'^2\ \mathrm{kg/m^2} - 447{,}349y'\ \mathrm{kg/m} + 1304{,}20\,\mathrm{kg} & \text{per } 5{,}5 < y' < 8{,}75\,\mathrm{m} \\ -0{,}018928y'^3\ \mathrm{kg/m^3} - 26{,}335y'^2\ \mathrm{kg/m^2} - 447{,}349y'\ \mathrm{kg/m} + 6370{,}75\,\mathrm{kg} & \text{per } 8{,}75 < y' \le 9\,\mathrm{m} \end{cases}$$

$$T_z'' = \begin{cases} +0{,}018928y''^3\ \mathrm{kg/m^3} - 26{,}359y''^2\ \mathrm{kg/m^2} - 456{,}11y''\ \mathrm{kg/m} & \text{per } 0 \le y'' < 5{,}5\,\mathrm{m} \\ +0{,}018928y''^3\ \mathrm{kg/m^3} - 26{,}359y''^2\ \mathrm{kg/m^2} - 456{,}11y''\ \mathrm{kg/m} + 1095{,}80\,\mathrm{kg} & \text{per } 5{,}5 < y'' < 8{,}75\,\mathrm{m} \\ +0{,}018928y''^3\ \mathrm{kg/m^3} - 26{,}359y''^2\ \mathrm{kg/m^2} - 456{,}11y''\ \mathrm{kg/m} + 6029{,}25\,\mathrm{kg} & \text{per } 8{,}75 < y'' \le 9\,\mathrm{m} \end{cases}$$

$$M_x' = \begin{cases} 0{,}004732y'^4\ \mathrm{kg/m^3} + 8{,}778y'^3\ \mathrm{kg/m^2} + 223{,}675y'^2\ \mathrm{kg/m} & \text{per } 0 \le y' < 5{,}5\,\mathrm{m} \\ 0{,}004732y'^4\ \mathrm{kg/m^3} + 8{,}778y'^3\ \mathrm{kg/m^2} + 223{,}675y'^2\ \mathrm{kg/m} - \\ -(y' - 5{,}5\,\mathrm{m})1304{,}20\,\mathrm{kg} & \text{per } 5{,}5 < y' < 8{,}75\,\mathrm{m} \\ 0{,}004732y'^4\ \mathrm{kg/m^3} + 8{,}778y'^3\ \mathrm{kg/m^2} + 223{,}675y'^2\ \mathrm{kg/m} - \\ -(y' - 5{,}5\,\mathrm{m})1304{,}20\,\mathrm{kg} - (y' - 7{,}75\,\mathrm{m})5066{,}55\,\mathrm{kg} & \text{per } 8{,}75 < y' \le 9\,\mathrm{m} \end{cases}$$

$$M_z'' = \begin{cases} -0{,}004732y''^4\ \mathrm{kg/m^3} + 8{,}786y''^3\ \mathrm{kg/m^2} + 232{,}55y''^2\ \mathrm{kg/m} & \text{per } 0 \le y' < 5{,}5\,\mathrm{m} \\ -0{,}004732y''^4\ \mathrm{kg/m^3} + 8{,}786y''^3\ \mathrm{kg/m^2} + 232{,}55y''^2\ \mathrm{kg/m} - \\ -(y'' - 5{,}5\,\mathrm{m})1095{,}80\,\mathrm{kg} & \text{per } 5{,}5 < y' < 8{,}75\,\mathrm{m} \\ -0{,}004732y''^4\ \mathrm{kg/m^3} + 8{,}786y''^3\ \mathrm{kg/m^2} + 232{,}55y''^2\ \mathrm{kg/m} - \\ -(y'' - 5{,}5\,\mathrm{m})1095{,}80\,\mathrm{kg} - (y'' - 7{,}75\,\mathrm{m})4933{,}45\,\mathrm{kg} & \text{per } 8{,}75 < y' \le 9\,\mathrm{m} \end{cases}$$


Taglio Tz
5000
4000
3000
2000
1000
0
-1000
-2000
-3000
-4000
-5000
Tz [kg]
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
y [m]