



Politecnico di Milano
Corso di Meccanica del Volo Spaziale II
Anno Accademico 2003/2004

Paolo Massioni - 642354

PROGETTO #182

disponibile in rete all'indirizzo <http://pmassio.altervista.org>

1 – SPECIFICHE DI PROGETTO E CONSIDERAZIONI INIZIALI

1.1 Le specifiche assegnate

Satellite spinnato in orbita geostazionaria, parametrizzazione d'assetto con angoli di Eulero 213, sensori: 2 di stelle, attuatori: 3 magnetici.

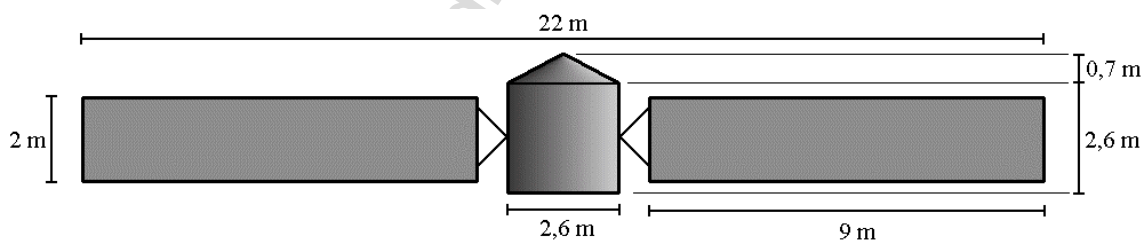
1.2 Interpretazione delle specifiche

Il satellite descritto può essere tipicamente interpretato come un satellite per telecomunicazioni; l'orbita geostazionaria gli permette di rimanere sempre in vista dalle zone servite e lo spin consente di rivolgere sempre verso terra le proprie antenne.

Per la realizzazione del progetto è necessario avere dei dati di massima sulle masse e la geometria del satellite; conviene quindi trarre queste informazioni dai dati disponibili su internet di un satellite realmente esistente. Per questo progetto è stato preso come riferimento un satellite per trasmissioni radio-televisive della compagnia francese Alcatel, il Nilesat-1:

Orbital position	7° west
Satellite dry mass	794 kg
Launch mass	1,666 kg
Span (solar panels extended)	22 m

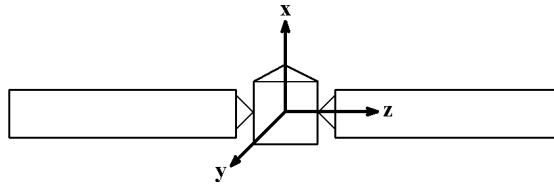
Non avendo dati ulteriori sulla forma del satellite, viene ipotizzata una configurazione come in figura, composta da un corpo centrale cilindrico con una estensione conica (lo "strumento" puntato verso terra), e due pannelli solari.



1.3 Masse e momenti d'inerzia

Per ricavare una stima dei momenti di inerzia del satellite si procede in modo molto approssimato. Della massa a secco (794 kg), si ipotizza che 300 kg siano dovuti ai pannelli solari e 494 kg siano dovuti al corpo centrale. Per semplicità, si considera tutta la massa del corpo centrale distribuita uniformemente sul solo cilindro. In questo modo, per simmetria, il baricentro è posizionato esattamente nel centro del cilindro.

Imponendo un riferimento di assi corpo come in figura:



si avrà la certezza, data la simmetria, che si tratta anche di assi principali.

Si possono quindi scrivere i momenti d'inerzia dei singoli componenti rispetto a degli assi paralleli a quelli dati passanti per il loro baricentro:

Pannello solare (considerato piano)	Corpo centrale
$I_{x(ps)} = \frac{M_{(ps)}l^2}{12} = 1012,5 \text{ kg m}^2$	$I_{x(cc)} = \frac{M_{(cc)}R^2}{2} = 417,43 \text{ kg m}^2$
$I_{y(ps)} = I_x + I_z = 1062,5 \text{ kg m}^2$	$I_{y(cc)} = M_{(cc)} \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) = 487,00 \text{ kg m}^2$
$I_{z(ps)} = \frac{M_{(ps)}h^2}{12} = 50 \text{ kg m}^2$	$I_{z(cc)} = I_{y(cc)} = 487,00 \text{ kg m}^2$
dove: $l = 9 \text{ m}$ (lunghezza di un pannello) $h = 2 \text{ m}$ (larghezza di un pannello) $M_{(ps)} = 150 \text{ kg}$ (massa di un pannello)	dove: $R = 1,3 \text{ m}$ (raggio del cilindro) $h = 2,6 \text{ m}$ (altezza del cilindro) $M_{(cc)} = 494 \text{ kg}$ (massa del corpo centrale)

Applicando il teorema degli assi paralleli si ottengono i valori complessivi dei momenti d'inerzia:

$$I_x = 2(I_{x(ps)} + M_{(ps)}z_g^2) + I_{x(cc)} = 15117 \text{ kg m}^2$$

$$I_y = I_{y(cc)} + 2(I_{y(ps)} + M_{(ps)}z_g^2) = 15287 \text{ kg m}^2$$

$$I_z = 2I_{z(ps)} + I_{z(cc)} = 587 \text{ kg m}^2$$

I tre valori trovati rispettano le "disuguaglianze" triangolari dei momenti d'inerzia.

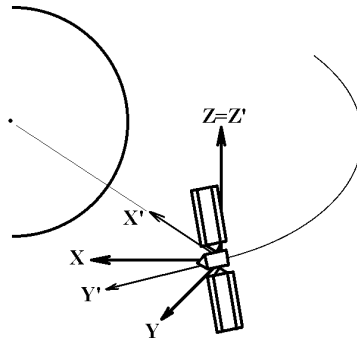
1.4 Terne di riferimento

Il satellite spinnato deve sempre mantenere il proprio strumento puntato verso terra: questo equivale a dire che il satellite deve far coincidere la propria terna di assi corpo con la terna orbitale, dove definiamo l'asse X' come l'asse radiale, Y' come tangenziale e Z' come binormale. La missione del satellite richiede di far coincidere il più possibile x con X', y con Y' e z con Z'.

Le equazioni della cinematica, nella loro forma più semplice, dovranno invece essere scritte in una terna inerziale. Come terna inerziale, per convenienza, se ne sceglie una che coincida con la terna orbitale all'inizio della simulazione; con il passare del tempo la terna inerziale (X Y Z) si discosterà dalla terna orbitale di una rotazione compiuta attorno all'asse Z. La velocità angolare di tale rotazione sarà la stessa della rivoluzione attorno alla terra sull'orbita geostazionaria, e quindi sarà pari a:

$$\Omega = \frac{2\pi}{23^h 56^m} = 7,2925 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

La figura illustra le terne considerate.



Si possono quindi definire le matrici di rotazione che consentono i passaggi fra i tre riferimenti, con la parametrizzazione assegnata (angoli di Eulero 213). Vengono definite:

$A_{213}(\varphi, \theta, \psi)$	$R_{213}(0,0,\Omega t)$	$A'_{213}(\varphi', \theta', \psi')$
Consente il passaggio dalla terna inerziale alla terna degli assi corpo:	Consente il passaggio dalla terna inerziale alla terna orbitale:	Consente il passaggio dalla terna orbitale alla terna degli assi corpo:
$\vec{v}_{xyz} = A_{213}(\varphi, \theta, \psi)\vec{v}_{XYZ}$	$\vec{v}_{X'Y'Z'} = R_{213}(0,0,\Omega t)\vec{v}_{XYZ}$	$\vec{v}_{xyz} = A'_{213}(\varphi', \theta', \psi')\vec{v}_{X'Y'Z'}$

Chiaramente, per le note proprietà delle matrici dei coseni direttori, varrà:

$$A'_{213}(\varphi', \theta', \psi') = A_{213}(\varphi, \theta, \psi)R_{213}^T(0,0,\Omega t)$$

Il sistema di controllo del satellite dovrà fare sì che la matrice che permette il passaggio dalla terna orbitale alla terna intrinseca del corpo (la “matrice dell’errore”) coincida con la matrice identità:

$$A'_{213}(\varphi', \theta', \psi') = I$$

che equivale a dire che i tre angoli φ' , θ' e ψ' dovranno essere nulli.

2 – Equazioni del moto

2.1 Solutore delle equazioni di Eulero e della cinematica

Per poter realizzare il modello completo della dinamica ci si avvale di Simulink. Un primo blocco chiamato “Dinamica” integra nel tempo le equazioni di Eulero del satellite semplice, prendendo come input le coppie agenti sul satellite (in assi corpo), e dando come output le velocità angolari. I valori dei momenti di inerzia vengono impostati esternamente come variabili di Matlab tramite uno script (inizio.m).

Un secondo blocco (chiamato “Cinematica”) riceve in ingresso le velocità angolari e dà come uscita i tre angoli di Eulero del satellite rispetto alla terna inerziale: φ , θ e ψ . Il blocco della cinematica funziona integrando le equazioni differenziali che esprimono le derivate nel tempo dei tre angoli.

Sulla realizzazione dei blocchi di dinamica e cinematica non c’è molto altro da dire, si tratta semplicemente di ricostruire le equazioni coinvolte con i “circuiti” di Simulink. Un’unica osservazione può essere fatta dalla forma delle equazioni della cinematica, dove:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\omega_x \cos \psi + \omega_y \sin \psi}{\cos \theta} \\ \dot{\theta} = \omega_x \cos \psi - \omega_y \sin \psi \\ \dot{\psi} = \omega_z + (\omega_y \cos \psi + \omega_x \sin \psi) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \end{cases}$$

Si nota come le equazioni diventino singolari nel caso in cui θ sia un multiplo dispari di 90° (rigorosamente, per $\theta = 90^\circ(2k + 1)$). Ovviamente bisogna avere cura che questa situazione non si verifichi mai per non mandare in “overflow” il simulatore; si può però notare che tale situazione è molto lontana dalla posizione di regime del satellite, in cui l’unica rotazione consistente sarà quella attorno all’asse Z della terna inerziale, corrispondente all’angolo ψ . La “singolarità” ad esempio si otterrebbe se in satellite fosse completamente ribaltato e puntasse uno dei poli celesti invece della terra.

2.2 Verifica sulla correttezza dei risultati

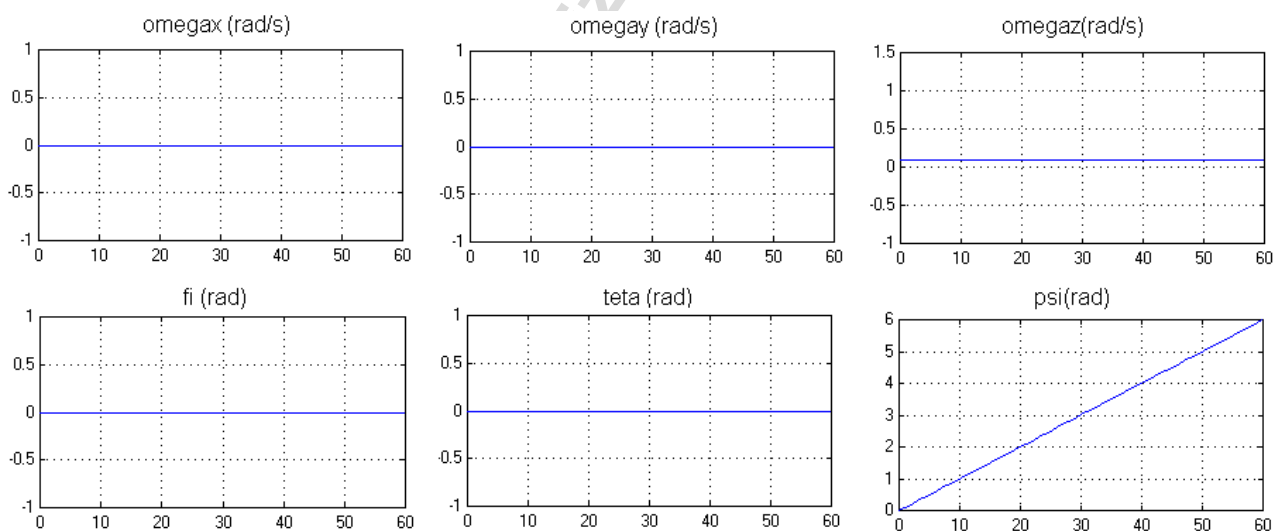
Per essere sicuri di non aver commesso errori nella costruzione dei blocchi di dinamica e cinematica è possibile dare dei valori iniziali “particolari” che permettono di verificare la correttezza della soluzione, oppure di controllare delle variabili che rimangono costanti nel tempo.

Il simulatore relativo a questo progetto è stato controllato nei modi che seguono.

1) Imponendo due delle velocità angolari iniziali nulle e i tre angoli di Eulero inizialmente nulli, nel moto libero l’uscita dà le velocità angolari costanti e due degli angoli di Eulero costantemente nulli, mentre il terzo (quello relativo all’asse attorno a cui la velocità angolare è non nulla) ha un andamento lineare.

esempio:

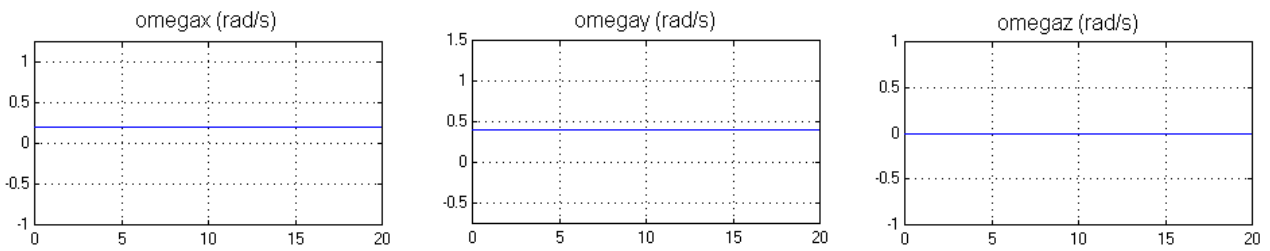
$$\begin{cases} I_x = 10000 \text{ kgm}^2 \\ I_y = 12000 \text{ kgm}^2 \\ I_z = 15000 \text{ kgm}^2 \end{cases} \begin{cases} \omega_x = 0 \\ \omega_y = 0 \\ \omega_z = 0,1 \text{ rad/s} \end{cases}$$



2) Assegnando due dei momenti d’inerzia uguali, se si assegna come nulla la velocità angolare rispetto all’altro asse, le velocità angolari rimangono costanti nel tempo.

esempio:

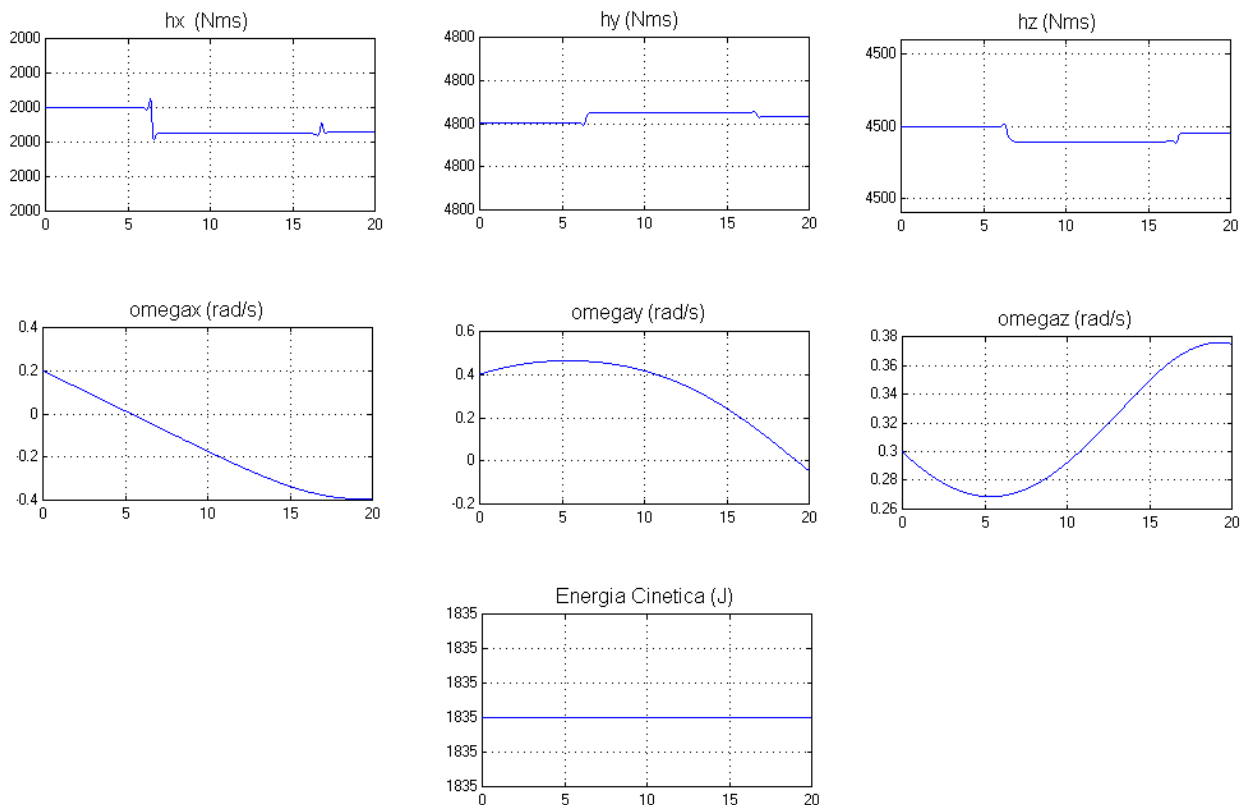
$$\begin{cases} I_x = 10000 \text{ kgm}^2 \\ I_y = 10000 \text{ kgm}^2 \\ I_z = 15000 \text{ kgm}^2 \end{cases} \begin{cases} \omega_x = 0,2 \text{ rad/s} \\ \omega_y = 0,4 \text{ rad/s} \\ \omega_z = 0 \end{cases}$$



3) Una parte del blocco della dinamica calcola l'energia cinetica e le tre componenti del momento angolare (nel riferimento inerziale, tramite gli angoli di Eulero ricavati con la cinematica): si può verificare che nel moto libero tali valori rimangono costanti, a meno di piccole variazioni dovute all'integrazione numerica.

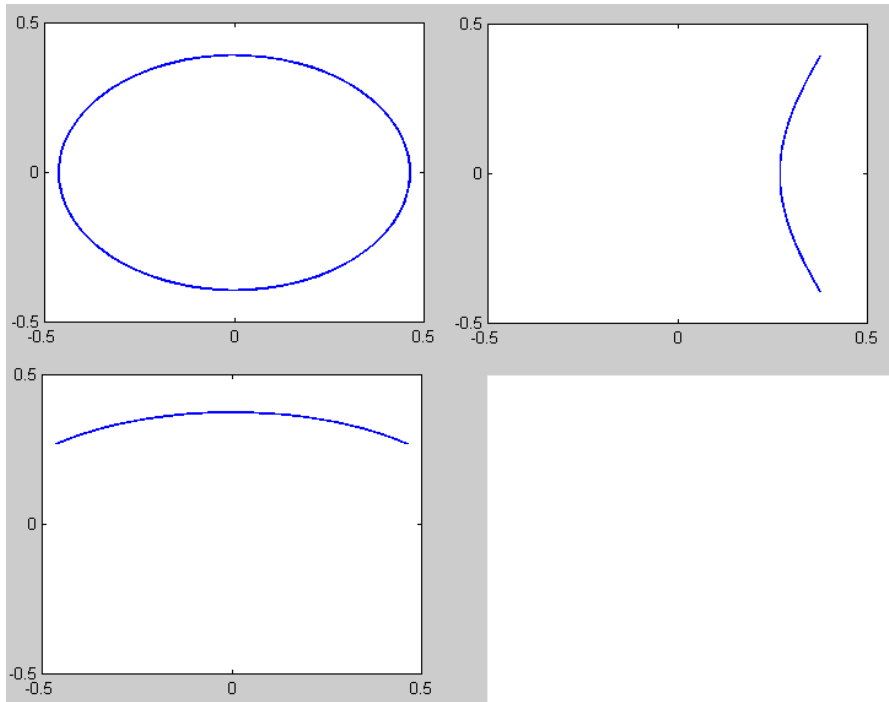
esempio:

$$\begin{cases} I_x = 10000 \text{ kgm}^2 \\ I_y = 12000 \text{ kgm}^2 \\ I_z = 15000 \text{ kgm}^2 \end{cases} \begin{cases} \omega_x = 0,2 \text{ rad/s} \\ \omega_y = 0,4 \text{ rad/s} \\ \omega_z = 0,3 \text{ rad/s} \end{cases}$$



Le “oscillazioni” del momento angolare sono apparenti e dovute al calcolo, si noti che la scala è molto piccola.

Disegnando i grafici con due delle tre componenti di velocità angolare sugli assi si ottengono le coniche proiezione della poloide.



Questa prova è decisiva perché verifica il funzionamento coordinato sia della dinamica che della cinematica.

3 – Disturbi

Un satellite in orbita può essere soggetto essenzialmente a 4 disturbi:

- 1) Gradiente di gravità
- 2) Disturbo magnetico
- 3) Pressione di radiazione
- 4) Resistenza atmosferica

Tutti i disturbi sono raccolti in unico blocco di Simulink chiamato appunto “Disturbo”, all’interno del quale sono separati i diversi componenti.

3.1 Gradiente di gravità

Si tratta di un disturbo intrinseco all’ambiente in cui si muove il satellite, dovuto al fatto che il campo gravitazionale non è uniforme ma è centrale. Tale disturbo, nella terna degli assi corpo, può essere espresso come:

$$\begin{cases} M_{x(gg)} = \frac{3k_T}{R^3} (I_z - I_y) c_3 c_2 \\ M_{y(gg)} = \frac{3k_T}{R^3} (I_x - I_z) c_1 c_3 \\ M_{z(gg)} = \frac{3k_T}{R^3} (I_y - I_x) c_1 c_2 \end{cases}$$

Dove $k_T = 3,986 \cdot 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$ e $R = 42163 \text{ km}$ è il raggio della geostazionaria.

La realizzazione pratica del blocco di Simulink, ottenuta tramite una funzione di Matlab, non richiede nessuna particolare accortezza; basta accorgersi che i tre coseni direttori c sono per definizione la prima colonna della matrice $A'_{213}(\varphi', \theta', \psi')$ e inserire la formula.

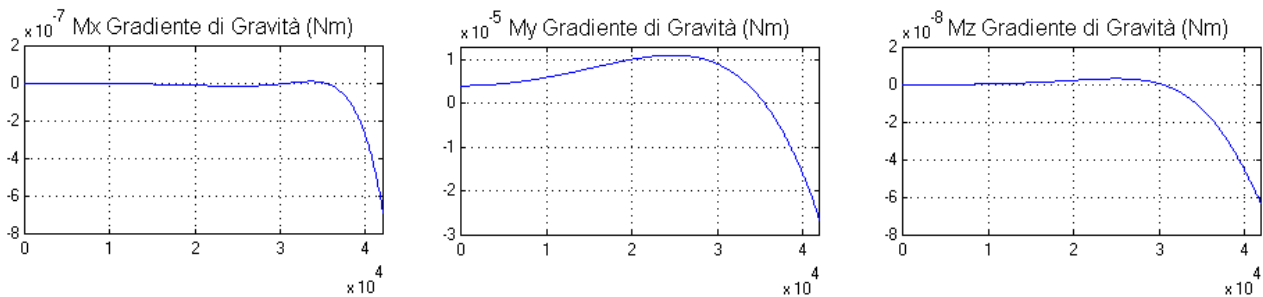
Si può stimare l'entità di tale disturbo proprio dalla formula; ipotizzando un piccolo disassamento degli assi corpo rispetto alla terna orbitale, il vettore c diventa:

$$\bar{c} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\psi' \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

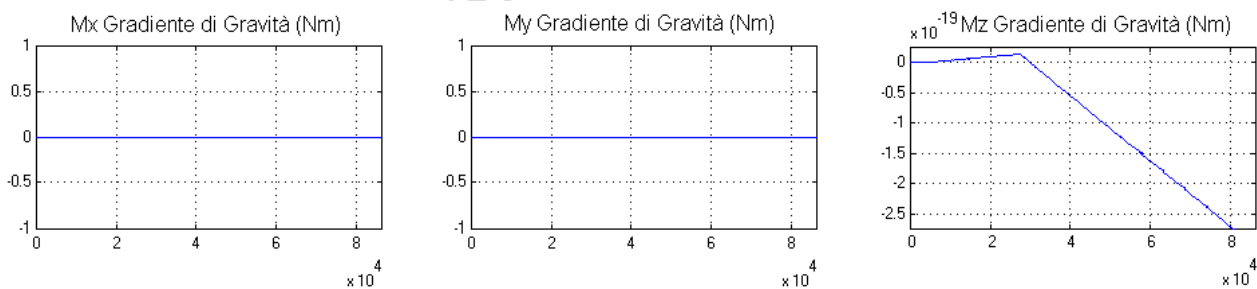
Si può quindi notare come la più rilevante delle tre componenti di disturbo sarà quella relativa all'asse y ; infatti, dato che I_y e I_x sono praticamente uguali, nell'espressione di M_y la massima differenza fra i momenti d'inerzia moltiplica l'angolo φ . Se si pone un valore esemplificativo di $\varphi = 1^\circ = 0,0175 \text{ rad}$ si ottiene $M_y = 4,04 \cdot 10^{-6} \text{ Nm}$.

Si può verificare la correttezza del funzionamento del blocco di Simulink nei seguenti due modi.

1) Effettivamente, introducendo un piccolo sbandamento iniziale, la componente di disturbo maggiore è proprio la M_y che ha un ordine di grandezza di 10^{-6} Nm ; se si pone proprio 1° come valore iniziale di φ , si può verificare che l'entità iniziale di M_y è proprio quella calcolata. Di seguito la situazione appena descritta (il moto è sotto l'effetto del solo gradiente di gravità):



2) Ponendo tutti gli angoli di Eulero nulli, cioè ponendo il satellite esattamente allineato con la terna orbitale, il disturbo è nullo (a meno di errori numerici); di seguito l'andamento del gradiente di gravità nel corso di un'orbita percorsa con il satellite perfettamente allineato con la terna orbitale:



Le oscillazioni sulla componente z sono minuscole e riconducibili a errori di integrazione numerica.

3.2 Disturbo magnetico

Il disturbo magnetico deriva dall'interazione fra il campo magnetico terrestre e la magnetizzazione residua del satellite.

Il campo magnetico terrestre è un fenomeno naturale ben noto e ben descritto, per cui all'interno del simulatore è possibile inserire un blocco che generi un modello adatto all'uso che se ne dovrà fare. A quote basse il campo magnetico terrestre ha una descrizione molto complessa ottenuta tramite la scomposizione in armoniche sferiche; tuttavia alle alte quote ($> 7000 \text{ km}$ circa), è sufficiente un

modello bipolare. La geostazionaria è un'orbita che si trova ad una quota tale da rendere l'approssimazione del bipolo ottima.

L'intensità del campo magnetico del bipolo è data da:

$$\vec{B}_{X'Y'Z'} = \frac{R^3 H_0}{r^3} (3(\hat{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \hat{m})$$

dove R è la distanza dal centro della terra, r è il raggio terrestre e H_0 è l'intensità del dipolo pari a 30219 nT. Il versore \hat{m} indica la direzione del dipolo ed è ricavabile rispetto alle coordinate orbitali dalla relazione:

$$\hat{m} = \begin{Bmatrix} \sin \theta_m \cos \alpha_m \\ \sin \theta_m \sin \alpha_m \\ \cos \theta_m \end{Bmatrix}$$

dove θ_m rappresenta l'inclinazione dell'asse magnetico rispetto a quello geografico e α_m è "l'ascensione retta" del polo nord magnetico. Si stima $\theta_m = 14^\circ$ e α_m come la differenza fra la longitudine geografica del satellite e quella del polo nord magnetico (101° W).

Il versore \hat{r} nelle coordinate scelte è:

$$\hat{r} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dalla prima formula si ricava il vettore campo magnetico in coordinate orbitali; prima di poter utilizzare tale informazione occorre trasportarla nelle coordinate degli assi corpo:

$$\vec{B}_{xyz} = A'_{213}(\varphi', \theta', \psi') \vec{B}_{X'Y'Z'}$$

Il campo magnetico alla quota considerata ha un modulo di circa $1,046 \cdot 10^{-7}$ T.

Il disturbo magnetico è calcolato dalla relazione:

$$\vec{M}_{(cB)} = \vec{D} \wedge \vec{B}$$

il blocco del simulatore che calcola questo disturbo non fa altro che eseguire questo prodotto vettoriale; resta da dare una stima delle tre componenti del vettore \vec{D} delle induzioni magnetiche residue. Tale grandezza è dovuta alla presenza di materiali ferromagnetici e alle correnti circolanti sul satellite. L'espressione del modulo di tale vettore è:

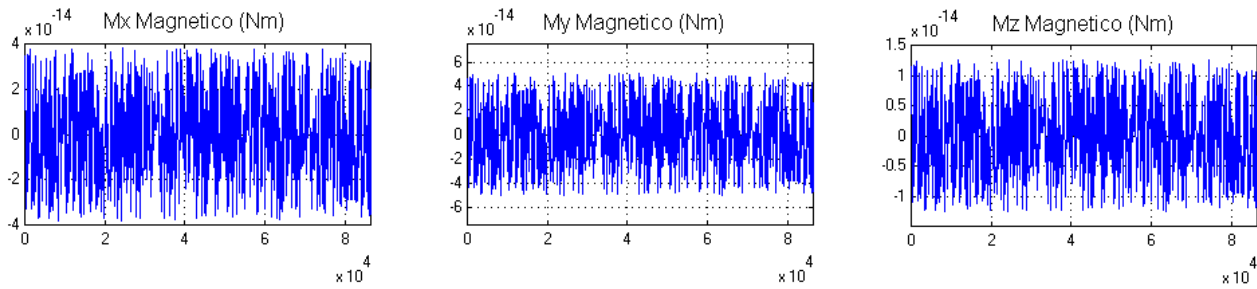
$$D = \mu n S I$$

dove μ è la permeabilità magnetica, n il numero di spire, S la superficie racchiusa da una spira e I l'intensità di corrente circolante.

Per poter simulare il disturbo saranno generati dei valori casuali di D che non siano in modulo maggiori di un certo "massimo" ipotizzato. Per stimare tale soglia si possono scegliere dei valori probabili delle grandezze in gioco, tenendo presente che comunque l'effetto non sarà molto grande. Ponendo $n = 1$ (è difficile che le correnti "caotiche" dei circuiti del satellite siano tutte nella stessa direzione, quindi tenderanno ad annullarsi fra loro), $I = 0,1$ A e $S = 4$ m², con il valore di permeabilità magnetica del vuoto si trova:

$$D_{MAX} = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ Nm/T}$$

Il disturbo sarà quindi dell'ordine dei 10^{-14} Nm, cosa che permette anche di verificare il funzionamento del simulatore. I grafici di seguito illustrano l'entità del disturbo magnetico nel corso di un'orbita completa in cui il satellite rimane sempre perfettamente allineato:



Si noti come la componente z sia la meno rilevante delle tre; ciò è dovuto al fatto che la direzione del campo magnetico nei pressi dell'equatore è quasi allineata alla direzione dell'asse di beccheggio; l'oscillazione del disturbo dipende solo dalla casualità nella generazione della magnetizzazione residua. Di fatto questo disturbo può essere considerato irrilevante.

3.3 Coppie dovute alla radiazione solare

La radiazione esercita una pressione sulle superfici che colpisce; in generale quindi il satellite subisce due disturbi dovuti alla luce emessa dalla terra e dal sole. Alla quota dell'orbita geostazionaria, la radiazione della terra è nettamente inferiore a quella del sole, per cui verrà considerata solo quest'ultima.

Per poter calcolare le coppie dovute alla luce è necessario avere un modello della geometria del satellite; questo modello è contenuto in una matrice che viene generata dallo script "superficie.m". Nella prima parte di tale script sono definite tutte le variabili geometriche del satellite (altezza, diametro, apertura dei pannelli, ecc); nella seconda viene generato il modello semplificato del satellite che viene schematizzato come un insieme di superfici piane.

Il modello viene inserito nella variabile globale SU: si tratta di una matrice con 7 righe e 29 colonne; ogni colonna rappresenta una superficie; i primi tre numeri della colonna sono le componenti del vettore che collega il baricentro del satellite con il baricentro della superficie (punto di applicazione della forza); nel quarto numero c'è l'area della superficie e negli ultimi tre le componenti del versore normale uscente alla superficie. Le prime 12 superfici sono la "discretizzazione" del cilindro come un prisma a base dodecagonale, le seconde 12 sono relative al cono (approssimato come piramide), la 25^a è la base circolare del cilindro e le ultime 4 sono relative ai pannelli solari (quattro e non due perché ogni pannello ha due facce). Nel corso della generazione di queste superfici viene introdotto in tutte le direzioni un errore sulla posizione del baricentro di 3 cm.

Le coppie dovute alla radiazione sono calcolate in un blocco che svolge tutti i conti all'interno di una funzione di Matlab (rad.m). La funzione riceve in ingresso gli angoli di Eulero e dà come uscita le coppie, calcolate tramite la relazione:

$$\vec{M}_{(rad)} = \sum_{i=1}^{29} (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{29} \left(\vec{r}_i \wedge -A_i \frac{p}{c} e_i \left((1-c_S) \hat{s} + 2 \left(c_S \hat{n}_i \cdot \hat{s} + \frac{1}{3} c_D \right) \hat{n}_i \right) \hat{n}_i \cdot \hat{s} \right)$$

dove $p = 1350 \text{ W/m}^2$ è l'intensità della radiazione solare in corrispondenza dell'orbita terrestre, c è la velocità della luce nel vuoto, \hat{s} è il versore (in prima approssimazione fisso nella terna inerziale) che indica la direzione di provenienza dei raggi solari, gli \hat{n}_i sono i versori normali uscenti dalle superfici (contenuti nelle ultime tre righe di SU), gli \vec{r}_i sono i vettori che collegano il baricentro del satellite ai baricentri delle superfici (le prime tre righe di SU), le A_i sono le aree (quarta riga di SU) e c_S e c_D sono rispettivamente il coefficiente di riflessione e di diffusione della luce. Il termine e_i è definito:

$$e_i = \begin{cases} 1 & \text{se } \hat{n}_i \cdot \hat{s} > 0 \\ 0 & \text{se } \hat{n}_i \cdot \hat{s} < 0 \end{cases}$$

che equivale a dire se la superficie è esposta o meno ai raggi solari; in pratica nella funzione un “if” controlla che il prodotto scalare sia positivo prima di proseguire con i conti. I coefficienti di assorbimento, riflessione e diffusione sono posti tutti uguali a 1/3 (anche se probabilmente per i pannelli solari sarebbe stato più corretto assegnare un coefficiente di assorbimento maggiore).

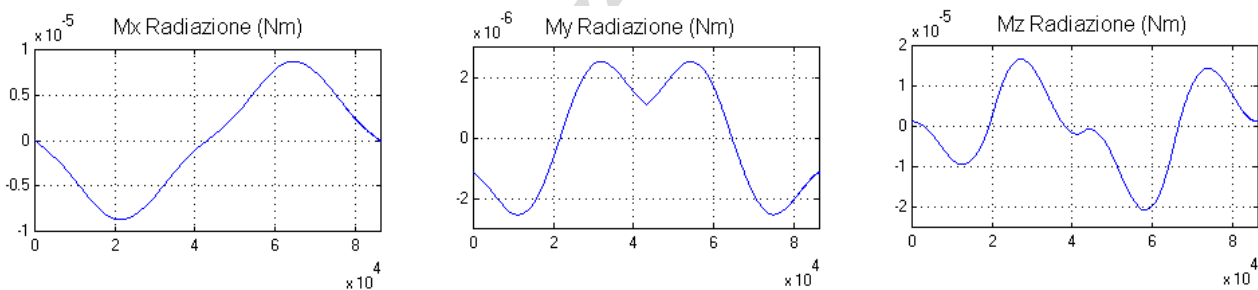
Sono stati ignorati tutti i problemi relativi alle ombre. Nella condizione nominale i pannelli non gettano mai la propria ombra sul corpo centrale, ma in vicinanza degli equinozi è possibile che certi tratti dell’orbita siano coperti dall’ombra della terra.

Le coppie in uscita sono già relative alla terna degli assi corpo se si ha cura che tutti i vettori presenti nella formula sopra siano in assi corpo; pertanto il versore \hat{s} in assi corpo sarà, ignorando il moto di rivoluzione della terra:

$$\hat{s}_{xyz} = A_{213}(\varphi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che equivale a dire: una direzione fissa nello spazio (in questo caso è giacente sul piano dell’orbita, cioè “equinoziale”) opportunamente ruotata. A questo scopo la funzione riceve in ingresso i tre angoli di Eulero.

Si può vedere come il disturbo oscilli fra i 10^{-6} Nm e i 10^{-5} Nm. Di seguito è illustrato l’andamento di tale disturbo nel corso di un’orbita completa in cui il satellite rimane sempre perfettamente allineato:



3.4 Resistenza atmosferica

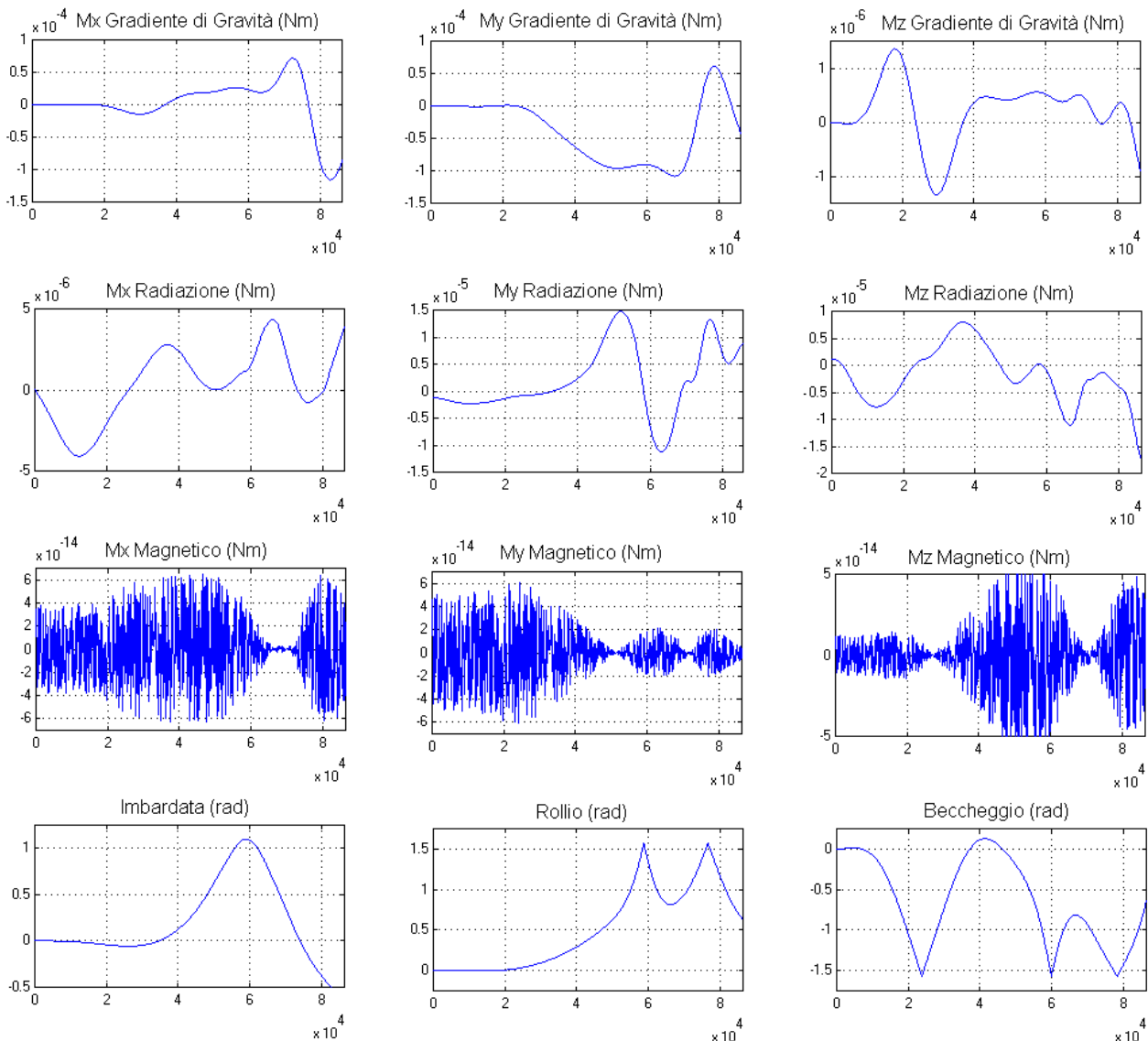
A 36000 km di quota l’atmosfera è di fatto assente: questo significa che tale disturbo può essere ignorato.

3.5 Moto sotto l’effetto del disturbo

Riassumendo, i disturbi più significativi sono quelli dovuti al gradiente di gravità e alla radiazione solare; nel simulatore è implementato anche il disturbo magnetico ma è irrilevante rispetto agli altri.

Si può ora avviare il simulatore ed osservare l’effetto dei disturbi sulla dinamica, facendolo partire dalla sua condizione nominale:

$$\begin{cases} \varphi_0 = 0 \\ \theta_0 = 0 \\ \psi_0 = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \omega_{x0} = 0 \\ \omega_{y0} = 0 \\ \omega_{z0} = \Omega \end{cases}$$



I grafici in fondo mostrano l'andamento dei tre angoli di Eulero di "errore" φ , θ e ψ in funzione del tempo: seppur piccoli e apparentemente insignificanti, i disturbi continuati nel tempo riescono a spostare significativamente il satellite nel corso di una sola orbita. Tra l'altro si noti che poco prima dei 60000 s il rollio raggiunge il valore di singolarità: non sono quelli gli angoli che vengono integrati, ma anche quelli relativi alla terna inerziale si avvicinano alla singolarità, per cui la soluzione non è più affidabile dopo un certo tempo.

4 – Stabilità del satellite

4.1 Stabilità in assenza di gradiente di gravità

Si può fare qualche piccola riflessione teorica sulla stabilità passiva del satellite. Esso ruota attorno al suo asse di minima inerzia, quindi in assenza di dissipazioni e di gradiente di gravità tenderebbe ad essere stabile passivamente (ma non smorzato) rispetto alle velocità angolari, mentre la rotazione attorno a z è instabile. Dato che il satellite deve mantenere costante il proprio puntamento, sarebbe necessario controllare in qualche modo l'asse z .

Quanto alle dissipazioni, il simulatore non ne tiene conto, ma su di un satellite reale esse saranno immancabili per via dell'elasticità del satellite stesso, quindi sicuramente sarà necessario un sistema che "rienergizzi" il moto del satellite.

4.2 Stabilità in presenza di gradiente di gravità

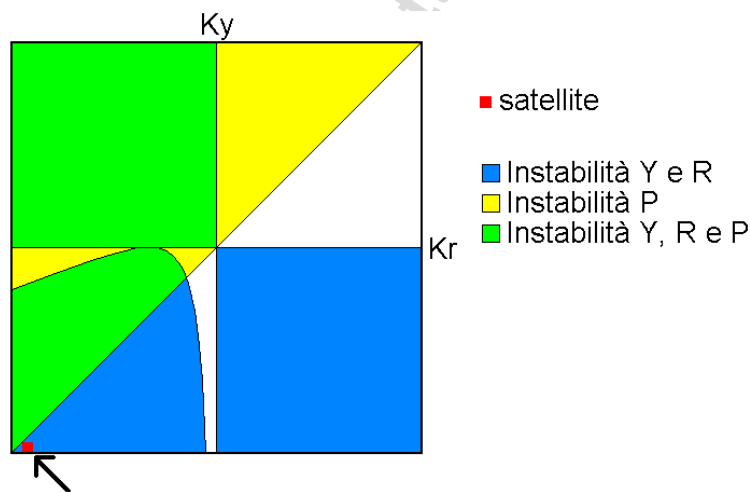
Si deve però anche tener conto dell'effetto del gradiente di gravità, che come visto, non è irrilevante; calcolando i coefficienti dei momenti d'inerzia:

$$\begin{cases} K_y = \frac{I_z - I_y}{I_x} = -0,9724 \\ K_r = \frac{I_z - I_x}{I_y} = -0,9505 \\ K_p = \frac{I_y - I_x}{I_z} = 0,2896 \end{cases}$$

si può verificare che non soddisfano la relazione della stabilità in rollio e imbardata:

$$(1 + 3K_r + K_r K_y)^2 > 16K_r K_y$$

mentre è stabile il puntamento rispetto all'asse z ($K_p > 0$). Il diagramma K_r/K_y di seguito mostra in quale zona si trova il satellite.

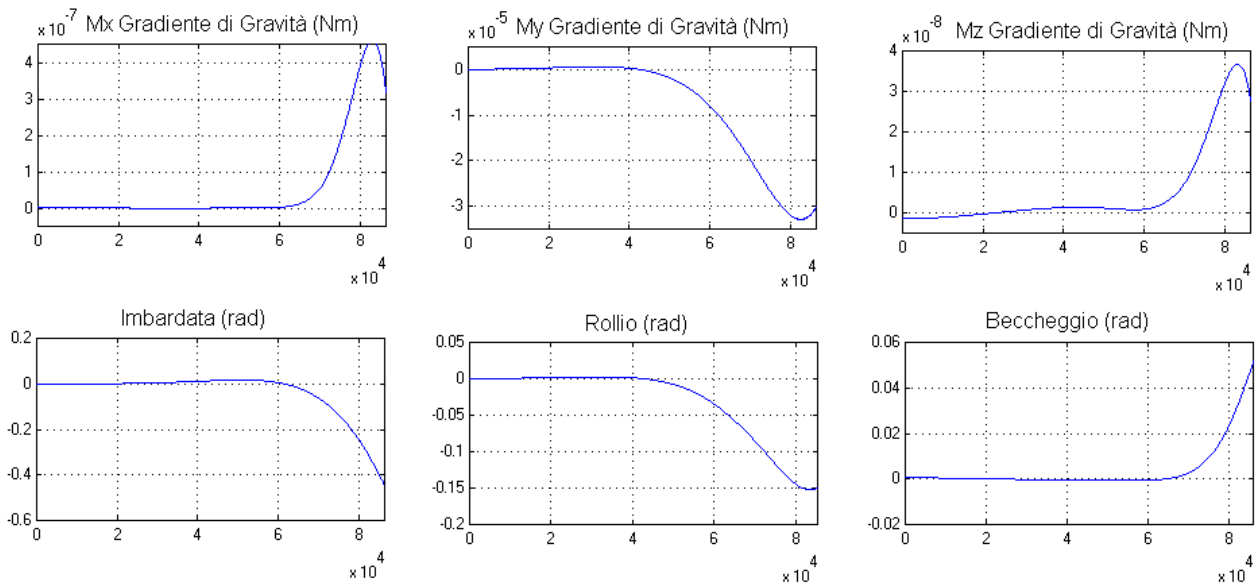


Riassumendo:

Rollio e Imbardata: instabile per via del gradiente di gravità.

Beccheggio: stabile grazie al gradiente di gravità.

L'esempio di seguito mostra il moto del satellite sotto l'effetto del solo gradiente di gravità; le condizioni iniziali si discostano da quelle nominali di un solo centesimo di grado su tutti e tre gli assi.



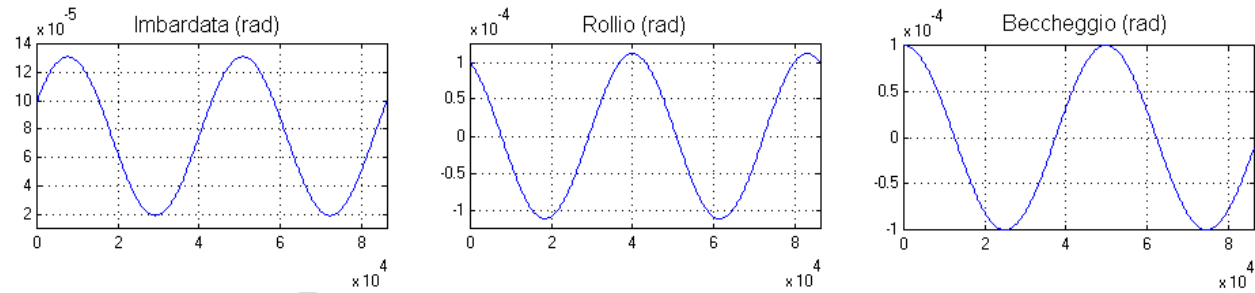
Il sistema è instabile come previsto dalla teoria; si nota anche che l'instabilità compare prima proprio in rollio e in imbardata (anche se meno evidente in quest'ultima), e dopo segue anche il beccheggio quando il sistema si è allontanato sufficientemente dalla linearità.

4.3 Una ulteriore verifica del simulatore

Si può verificare il corretto funzionamento del simulatore confrontando i suoi risultati con un risultato noto della teoria, quello in cui $I_x \rightarrow 0$ e $I_y = I_z$. Ponendo le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} I_x = 10 \text{ kg m}^2 \\ I_y = 15000 \text{ kg m}^2 \\ I_z = 15000 \text{ kg m}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_{x0} = 0 \\ \omega_{y0} = 0 \\ \omega_{z0} = \Omega \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_0 = 0,0001 \text{ rad} \\ \theta_0 = 0,0001 \text{ rad} \\ \psi_0 = 0,0001 \text{ rad} \end{cases}$$

e avviando il simulatore con il gradiente di gravità come unico disturbo, si ottiene come uscita:



Si può notare come il moto sia semplicemente stabile, con oscillazioni a frequenza doppia rispetto a quella orbitale per imbardata e rollio, mentre nel beccheggio la frequenza è $\sqrt{3}$ volte quella orbitale.

5 – SENSORI

Quanto fatto finora ha lo scopo di simulare il funzionamento della “natura”: nel satellite reale non ci sono componenti che svolgono i calcoli sopra visti. Comincia ora la parte che emula il satellite vero e proprio.

5.1 Specifiche dei sensori di stelle

La specifica assegna due sensori di stelle: si tratta di telecamere, fissate sul satellite, che sono in grado di riconoscere le stelle inquadrare grazie al confronto con le mappe stellari nei loro database: danno quindi come uscita le coordinate celesti della direzione puntata, con precisioni dell'ordine del secondo d'arco. Esistono sensori in grado di indicare anche la rotazione attorno all'asse di puntamento (con minore precisione), ma per questo progetto ci si limita ad usare sensori che rilevano il semplice puntamento. Due direzioni sono sufficienti per ricostruire l'assetto.

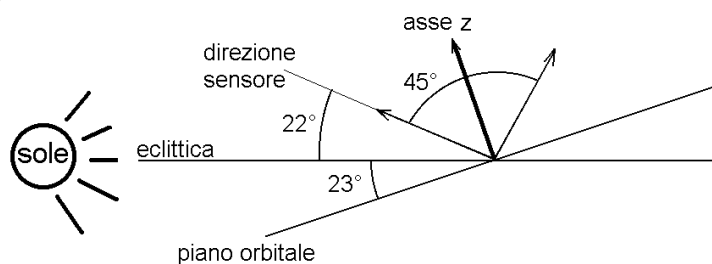
Per avere dei dati più precisi su tale genere di sensori ci si può avvalere di una ricerca in internet. Come modello per questo progetto sono scelti i sensori di stelle dell'azienda americana VFCT, di cui sono riportate di seguito le specifiche di maggiore interesse.

	VF STC 2
Mass electronics + baffle	3.4 kg
Power	5.0 Watts
Accuracy (x,y)	3 arc seconds
Field of View	160 x 160
Star Catalog	~5,000
Search Time (Initial)	30 seconds
Search Time	2 seconds
Maximum Star Magnitude	+ 6
Lifetime	15 years

I dati più rilevanti sono l'accuratezza e il "search time", che in pratica indica ogni quanto tempo il sensore dà un output e il ritardo che questo output ha. A rigore si dovrebbe quindi temporizzare il segnale e introdurre il ritardo: di fatto però tale pratica si rivelerà inutile in quanto per integrare il moto lungo un'intera orbita il passo di integrazione sarà posto pari a 10 s o più.

5.2 Montaggio dei sensori

I sensori non devono mai puntare il sole, altrimenti vanno perduti; inoltre è noto che l'errore sull'assetto misurato è minimo se le due direzioni di puntamento sono ortogonali. Una soluzione di montaggio compatibile con le richieste è quella illustrata in figura: come si può vedere, anche nella situazione più pericolosa di sole alla massima declinazione, se il satellite rimane nella sua condizione nominale ci sono 22° di elongazione fra il sole e la zona inquadrata.



5.3 Implementazione dei sensori

L'output dei sensori viene emulato da un blocco opportuno che condensa tutti i calcoli in una funzione di Matlab, sens.m. La funzione riceve in ingresso l'assetto del satellite rispetto al riferimento fisso e dà come uscita l'assetto misurato dai sensori, ricostruito tramite il metodo algebrico.

Per dettagli sul calcolo si rimanda alla lettura della funzione che è opportunamente commentata. Riassumendo, la funzione parte dalle due direzioni puntate nella terna di assi corpo del satellite (le telecamere infatti sono fisse), che sono le due descritte al paragrafo precedente:

$$\hat{v}_{1,xyz} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{v}_{2,xyz} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix}$$

Moltiplicando tali vettori per la matrice $A_{213}^T(\varphi, \theta, \psi)$ si ottengono le direzioni puntate nel riferimento inerziale (cioè: quello delle stelle). "Sporcando" con un errore casuale queste direzioni si ottengono le direzioni misurate, l'output dei due sensori. L'errore è applicato in modo che la direzione misurata rientri in un cono di apertura massima pari a quella stabilita (3 arcsec). L'assetto viene ricostruito con il metodo algebrico, e si ha come risultato una matrice $A_{213m}(\varphi, \theta, \psi)$, dove il pedice m sta per "misurata". Viene quindi calcolata la "matrice dell'errore misurata":

$$A'_{213m}(\varphi', \theta', \psi') = A_{213m}(\varphi, \theta, \psi) R_{213}^T(0, 0, \Omega t)$$

La funzione dà come uscita le righe di questa matrice e i coefficienti "di errore" necessari per il controllo:

$$\begin{cases} a_x = \frac{1}{2}(A'_{m12} - A'_{m21}) \\ a_y = \frac{1}{2}(A'_{m23} - A'_{m32}) \\ a_z = \frac{1}{2}(A'_{m31} - A'_{m13}) \end{cases}$$

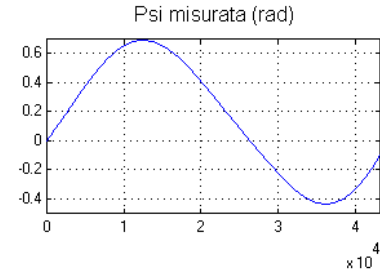
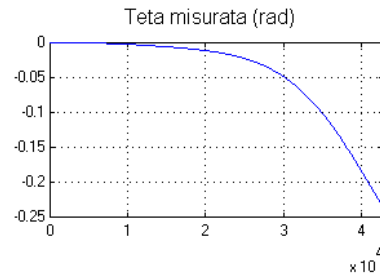
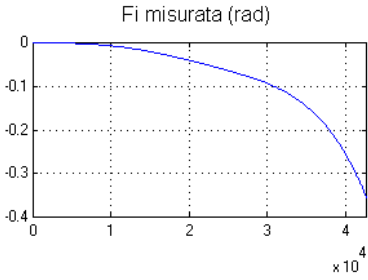
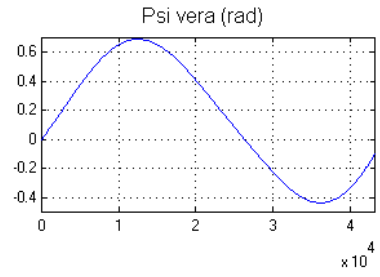
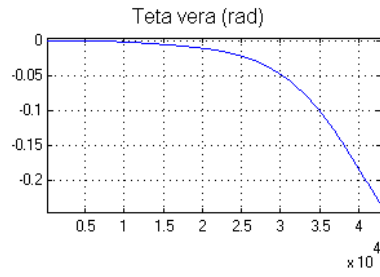
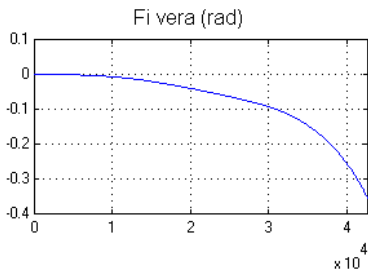
Il blocco esternamente calcola le velocità angolari misurate grazie ai sensori tramite la relazione:

$$[\omega \wedge] = -\dot{A}'_{213m} A'^T_{213m}$$

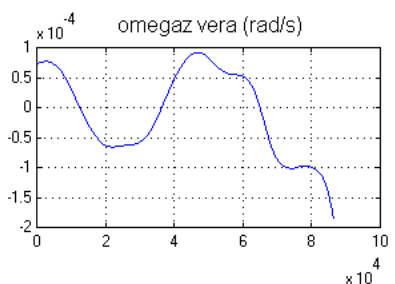
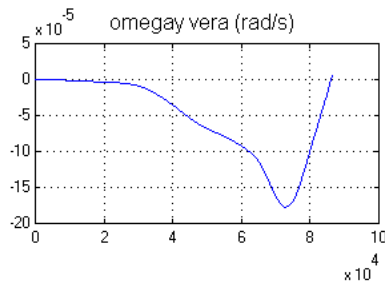
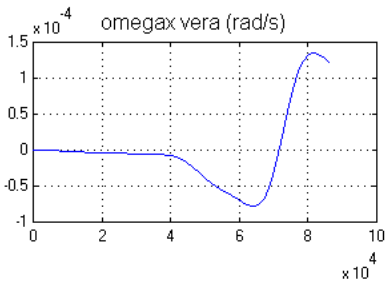
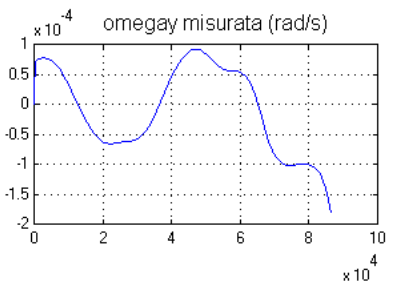
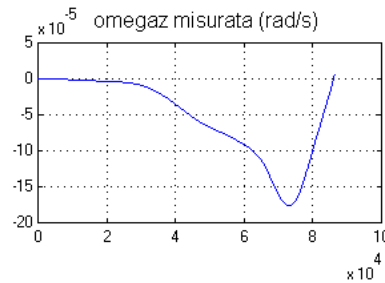
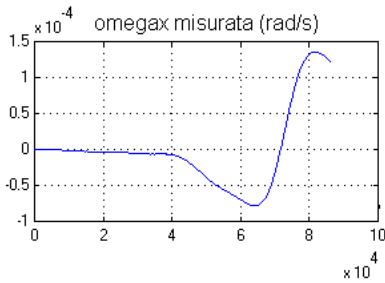
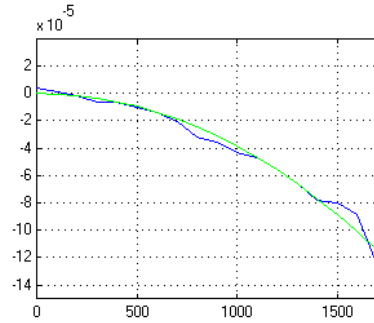
Si può notare che le equazioni ottenute sono più del necessario, pertanto non c'è bisogno di derivare tutta la matrice ma solo alcune delle sue righe. Tale derivata è ottenuta numericamente ed è influenzata molto dall'errore casuale, pertanto si potrebbe pensare di filtrarla con un passabasso.

Riassumendo: tramite il blocco dei sensori, ora i sistemi del satellite conoscono un proprio assetto e una propria velocità angolare, che differiscono da quelli veri per via dell'inaccuratezza dei sensori. Il satellite non conosce i dati "veri", per cui il controllo sarà basato solo su quelli misurati.

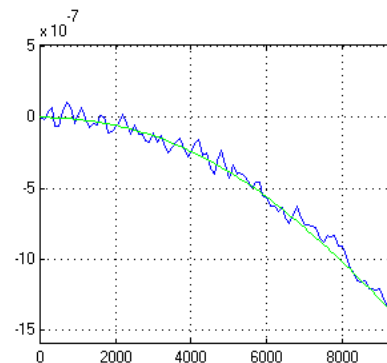
I primi 7 grafici di seguito permettono di confrontare, nel corso di un moto sotto l'effetto del disturbo, i valori degli angoli misurati con quelli reali; gli ultimi 7 invece mostrano l'andamento delle velocità angolari misurate e vere nel corso della stessa simulazione. L'operazione di derivazione amplifica in proporzione gli errori, ma l'alta accuratezza dei sensori di stelle fa sì che l'imprecisione sia comunque molto piccola, e tutte le curve dei valori misurati sono quasi perfettamente sovrapponibili a quelle dei valori veri.



Confronto in dettaglio fra la Fi misurata e la Fi vera



Confronto in dettaglio fra la omegax misurata e la omegax vera



6 – Controllore

6.1 Le equazioni da controllare

Per costruire il regolatore occorre avere ben presenti le equazioni da controllare; dato che si sta trattando di un satellite a semplice spin soggetto a consistente gradiente di gravità, le equazioni linearizzate saranno:

$$\begin{cases} I_x \ddot{a}_x + (I_z - I_y - I_x) \Omega \dot{a}_y + (I_z - I_y) \Omega^2 a_x = M_{x(c)} \\ I_y \ddot{a}_y + (I_x + I_y - I_z) \Omega \dot{a}_x + 4(I_z - I_x) \Omega^2 a_x = M_{y(c)} \\ I_z \ddot{a}_z + 3(I_y - I_x) \Omega^2 a_x = M_{z(c)} \end{cases}$$

Si può notare che la terza equazione è disaccoppiata dalle altre, e che i termini di accoppiamento fra le prime due contengono proprio le derivate dei “coefficienti di errore” e non le velocità angolari. Per semplificare la scrittura del regolatore, si possono riscrivere le equazioni accorpondo alcuni termini nella coppia di controllo:

$$\begin{cases} I_x \ddot{a}_x = M_{x(c)} - (I_z - I_y - I_x) \Omega \dot{a}_y - (I_z - I_y) \Omega^2 a_x = M'_{x(c)} \\ I_y \ddot{a}_y = M_{y(c)} - (I_x + I_y - I_z) \Omega \dot{a}_x - 4(I_z - I_x) \Omega^2 a_x = M'_{y(c)} \\ I_z \ddot{a}_z = M_{z(c)} - 3(I_y - I_x) \Omega^2 a_x = M'_{z(c)} \end{cases}$$

A questo punto le tre equazioni sono formalmente identiche.

6.2 Leggi di controllo

Si sceglie di effettuare un controllo secondo un regolatore PD (proporzionale/derivativo), per cui la generica azione di controllo può essere espressa come:

$$\frac{M'(c)}{I} = -k_p a - k_d \dot{a}$$

L'equazione diventa così:

$$\ddot{a} + k_d \dot{a} + k_p a = 0$$

I valori adeguati dei coefficienti sono ricavabili dalle prestazioni (pulsazione e smorzamento) che si desidera assegnare al sistema:

$$\begin{cases} k_p = \omega_s^2 = k^2 \Omega^2 \\ k_d = 2\xi \omega_s = 2\xi k \Omega \end{cases}$$

La pulsazione è stata espressa come un multiplo secondo un coefficiente k della pulsazione dell'orbita. I valori di ξ e k sono impostati dallo script inizio.m; è anche pensata la possibilità di introdurre un controllo con diverse prestazioni sull'asse z. I valori impostati dallo script sono:

$$\begin{cases} k = 30 \\ \xi = 0,7 \end{cases}$$

ma possono essere semplicemente modificati dall'utente.

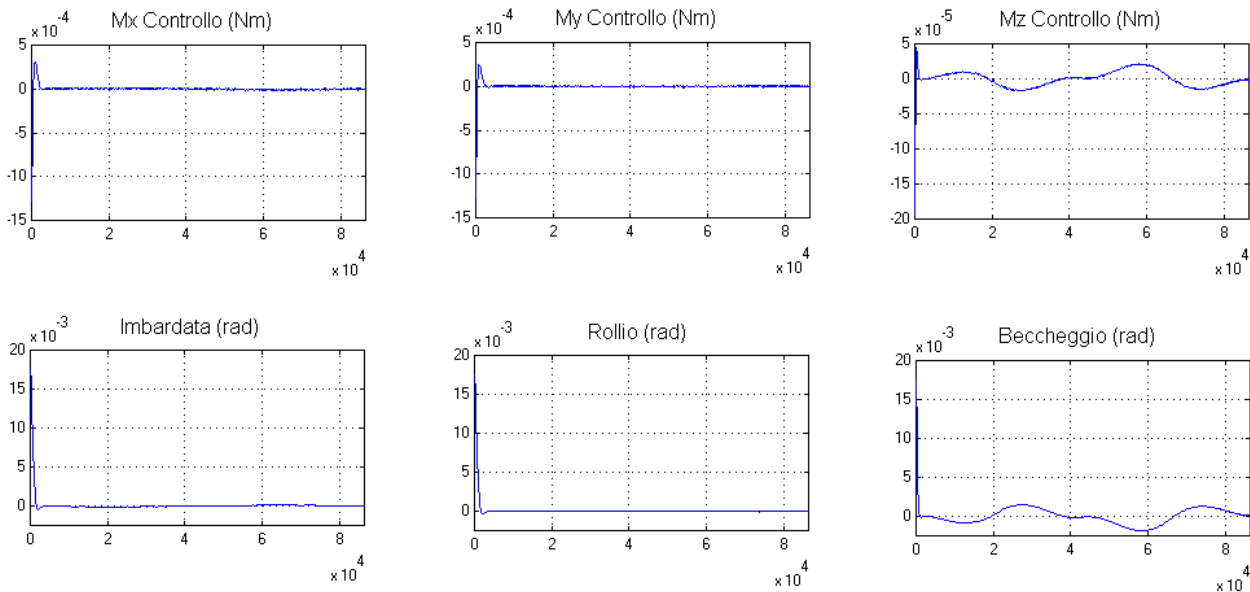
Il blocco del controllore deve dunque calcolare le espressioni della coppia di controllo secondo i coefficienti scelti, “restituendo” i termini che sono stati inizialmente accorpati, cioè:

$$\begin{cases} M_{x(c)} = -I_x k_p a_x - I_x k_d \dot{a}_x + (I_z - I_y - I_x) \Omega \dot{a}_y + (I_z - I_y) \Omega^2 a_x \\ M_{y(c)} = -I_y k_p a_y - I_y k_d \dot{a}_y + (I_x + I_y - I_z) \Omega \dot{a}_x + 4(I_z - I_x) \Omega^2 a_x \\ M_{z(c)} = -I_z k_p a_z - I_z k_d \dot{a}_z + 3(I_y - I_x) \Omega^2 a_x \end{cases}$$

La costruzione del blocco richiede semplicemente l'espressione delle equazioni sopra scritte mediante i "circuiti". Le derivate vengono calcolate numericamente.

6.3 Prima verifica dell'efficacia del controllo

Una prima verifica sul funzionamento del regolatore può essere fatto collegando direttamente le coppie in uscita dal regolatore con il blocco della dinamica: è come se il satellite avesse un "attuatore perfetto" che è in grado di eseguire alla lettera le sue richieste. Di seguito alcuni dei risultati, che sembrano confortare sulla bontà del controllo; le condizioni iniziali vedevano il satellite già con la sua velocità angolare nominale ma spostato di 1° su tutti i tre assi:



Il controllo sull'asse di beccheggio sembra essere più gravoso, probabilmente a causa del fatto che il sistema è più veloce a causa del basso valore di I_z . Per realizzare i grafici sopra, la pulsazione del sistema di controllo sul beccheggio è stata posta doppia rispetto a quella degli altri assi.

7 – Attuatori

Fra le coppie richieste dal controllore e le coppie effettivamente agenti ci sono di mezzo degli attuatori, che cercano quanto meglio possono di erogare le coppie richieste dal regolatore. Come per i sensori, anche sugli attuatori intervengono degli errori che avranno come inevitabile conseguenza quella di rendere il controllo meno preciso.

7.1 Un cambio nelle specifiche

La specifica richiedeva l'uso di attuatori magnetici. Come è noto però, gli attuatori magnetici sono inutilizzabili alla quota della geostazionaria, dove il campo magnetico è dell'ordine dei 10^{-7} T, e difficilmente sarà possibile contrastare i disturbi che sono dell'ordine di 10^{-6} Nm, a meno di ipotizzare oggetti enormi in grado di avere una magnetizzazione di 10 Nm/T o più.

Inoltre per loro natura gli attuatori magnetici possono applicare solamente coppie normali al vettore campo magnetico; in prossimità dell'equatore tale vettore tende ad essere parallelo all'asse di beccheggio: questo significa che il beccheggio (che, come visto sopra, non è controllabile tramite altre azioni perché l'equazione linearizzata della sua dinamica è disaccoppiata) può essere debolmente controllato sulla geostazionaria, e in certi punti (dove B fosse esattamente coincidente con l'asse di beccheggio) addirittura non controllato.

Per queste ragioni la specifica viene cambiata scegliendo di montare 4 ruote di reazione, una in più del necessario per avere una ridondanza.

7.2 Scelta dei rotori

Ancora ci si affida alla rete per avere dati sulle ruote di reazione. La VFCT ha a disposizione anche questo tipo di equipaggiamento; di seguito le specifiche di maggiore interesse delle ruote scelte.

	Nittany Lion
N-m-s	50.0
Size (in.)	6x6x6
Weight	4.5 lbs
Peak Power	50 W
Speed (Max)	32,000
Life	>200 years
Speed Control	+/- 0.03%

Le informazioni utili ai fini pratici di questo progetto sono due.

La prima è quella sullo “speed control”, che è l’unica informazione disponibile sull’errore commesso dalla ruota: questo errore verrà interpretato sia come errore sulla velocità misurata della ruota (si ipotizza che gli attuatori misurino la velocità del rotore), sia come errore sulle accelerazioni angolari imposte ai rotori.

La seconda è il massimo “N-m-s”, cioè il massimo valore di momento angolare che il rotore può assumere, dopodiché è saturo. Le ruote scelte hanno un valore abbastanza elevato per una sola orbita: a posteriori si vedrà che al massimo arriva a circa 0,2 Nms nel corso di una simulazione (una orbita). Tuttavia si deve tenere conto che il satellite deve rimanere funzionante per parecchi anni (almeno una decina) e quindi è necessario dare un certo margine. Probabilmente non sono necessari altri sistemi di controllo per desaturare le ruote dato che i disturbi dovrebbero annullarsi nel tempo in quanto ciclici; ma queste considerazioni così fatte sono molto approssimative, lo studio del problema richiederebbe un’analisi più accurata degli effetti cumulativi dei disturbi su tempi lunghi.

7.3 Montaggio dei rotori

Si sceglie di montare i rotori nella classica configurazione a “grappolo” attorno all’asse z, per cui esprimendo il momento angolare totale in funzione di quelli dei singoli rotori si ha:

$$\vec{h}_{Rtot} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_{R1} \\ h_{R2} \\ h_{R3} \\ h_{R4} \end{Bmatrix} = D\{h_R\}$$

($\{h_R\}$ non è un "vettore della fisica",
la notazione diversa serve a
distinguere questa caratteristica)

La matrice D è impostata dallo script inizio.m nella variabile globale RR; lo script calcola anche la pseudoinversa (RRI) con la formula:

$$D^* = D^T (DD^T)^{-1}$$

7.4 Le equazioni dei rotori

Le coppie di controllo devono ora essere espresse secondo i termini aggiuntivi che compaiono nelle equazioni della dinamica grazie alla presenza dei rotori.

Eguagliando le coppie di controllo con le coppie causate dai rotori si ha:

$$\vec{M}_{(c)} = -D\{\dot{h}_R\} - \vec{\omega} \wedge D\{h_R\}$$

la variabile controllabile è l'accelerazione angolare dei rotori, che corrisponde alla derivata del momento angolare; tale parametro è ricavabile moltiplicando a sinistra per la pseudoinversa:

$$\{\dot{h}_R\} = D^* (\vec{M}_{(c)} - \vec{\omega} \wedge D\{h_R\})$$

7.5 Implementazione delle ruote di reazione

Il blocco delle 4 ruote di reazione agisce con una funzione Matlab, `reaz.m`, e sfrutta un integratore di Simulink per integrare i momenti angolari dei rotori.

La funzione riceve in ingresso la coppia di controllo comandata dal regolatore, le velocità angolari misurate e quelle vere. Ancora per i dettagli sul funzionamento della procedura si rimanda alla lettura della stessa. Riassumendo, la procedura calcola il vettore $\{\dot{h}_R\}$ basandosi su quello che il satellite ha, cioè sulle velocità angolari misurate del satellite e dei rotori:

$$\{\dot{h}_{Rvoluta}\} = D^* (\vec{M}_{(c)} - \vec{\omega}_m \wedge D\{h_{Rm}\})$$

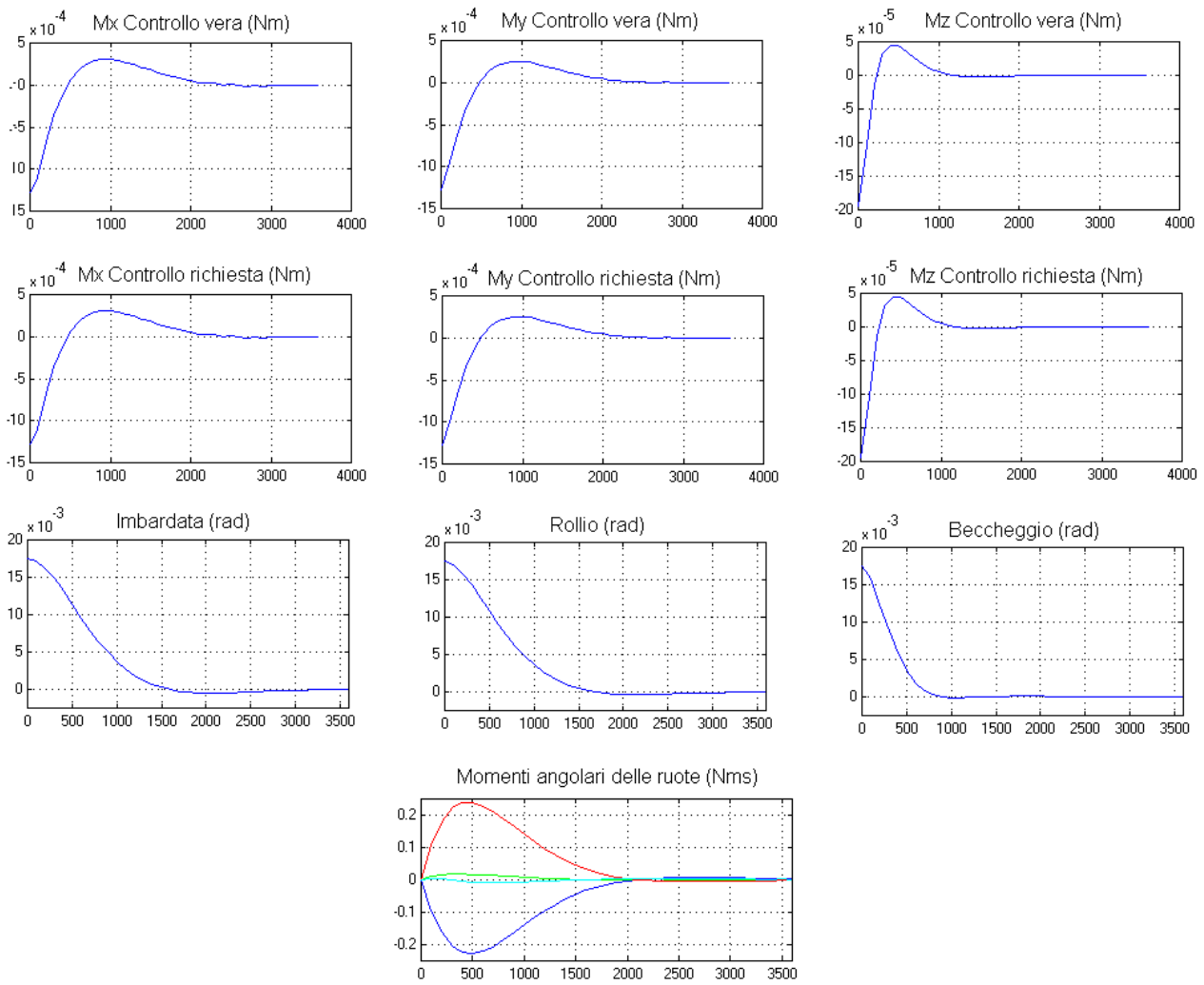
dove $\{h_{Rm}\}$ è il vettore $\{h_R\}$ misurato, cioè sporcato con l'errore relativo casuale impostato. Poi però la coppia che effettivamente agisce sul satellite viene calcolata sulla base delle variabili "vere":

$$\vec{M}_{(effettiva)} = -D\{\dot{h}_{Rvoluta}\} - \vec{\omega} \wedge D\{h_R\}$$

Tale coppia costituisce l'uscita della funzione assieme alle "accelerazioni angolari" (in realtà sono derivate dei momenti d'inerzia); queste ultime vengono integrate esternamente da un blocco integratore che ha come valore iniziale quello nullo dato che si tratta di ruote di reazione.

7.6 Verifica sugli attuatori

La verifica è semplice e consiste nel confrontare le coppie richieste dal controllore con quelle effettivamente erogate. I grafici di seguito mostrano tale confronto; le condizioni iniziali vedevano il satellite con uno sbandamento di $0,1^\circ$ su tutti gli assi, in una situazione senza disturbi. Le curve sono tutte perfettamente sovrapponibili e si può anche verificare la convergenza del sistema alla condizione nominale con un transitorio del secondo ordine.



L'ultimo grafico mostra i momenti angolari delle quattro ruote di reazione; si noti come esse diano una accelerazione iniziale che porta il satellite a ruotare verso la sua posizione nominale, e poi diano una azione contraria per fermarlo.

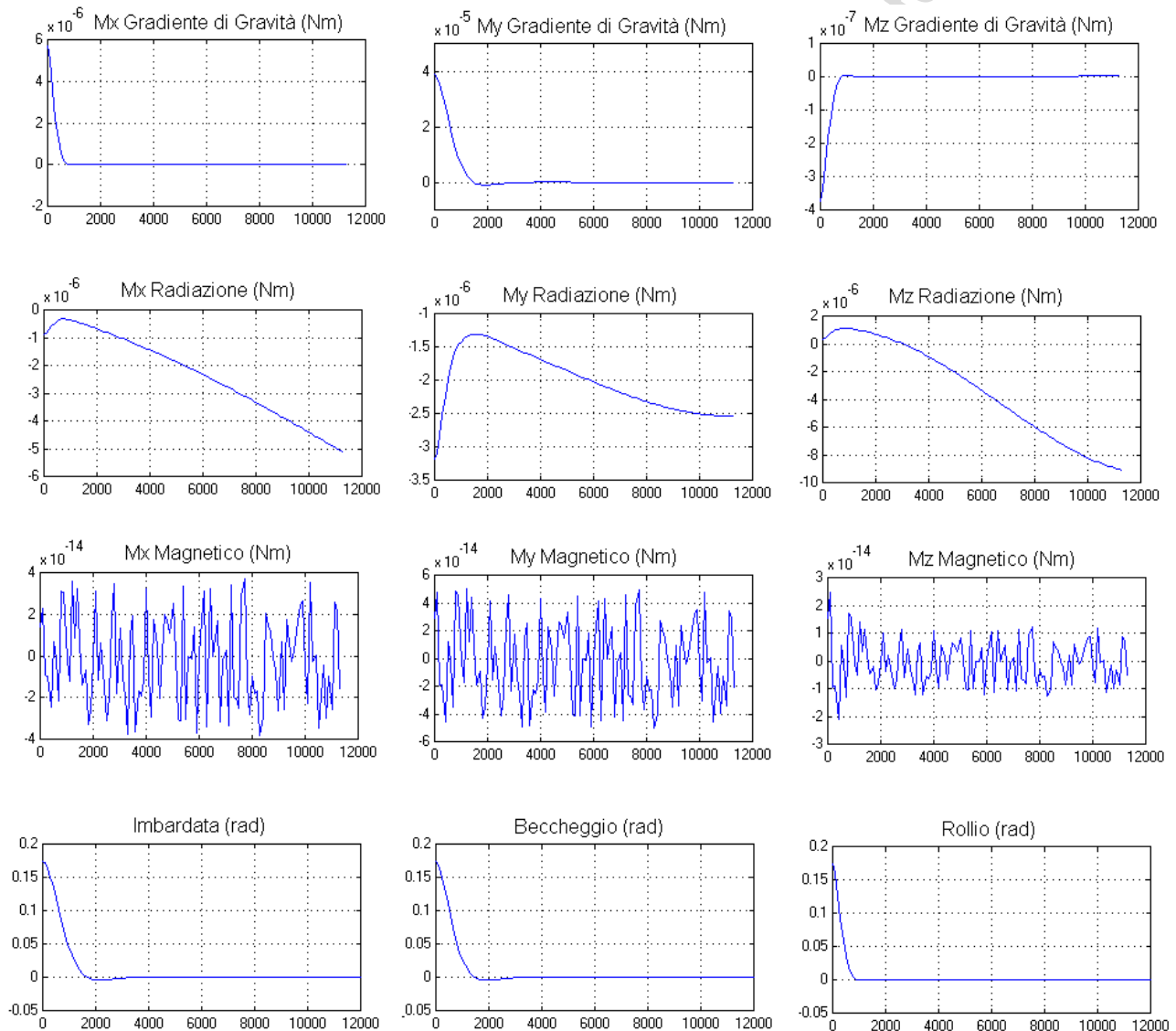
disponibile in rete all'indirizzo

8 – Il satellite completo

Il satellite ora è completo, vengono di seguito mostrati i risultati di alcune prove che possono essere fatte, che dimostrano l'efficacia del sistema di controllo.

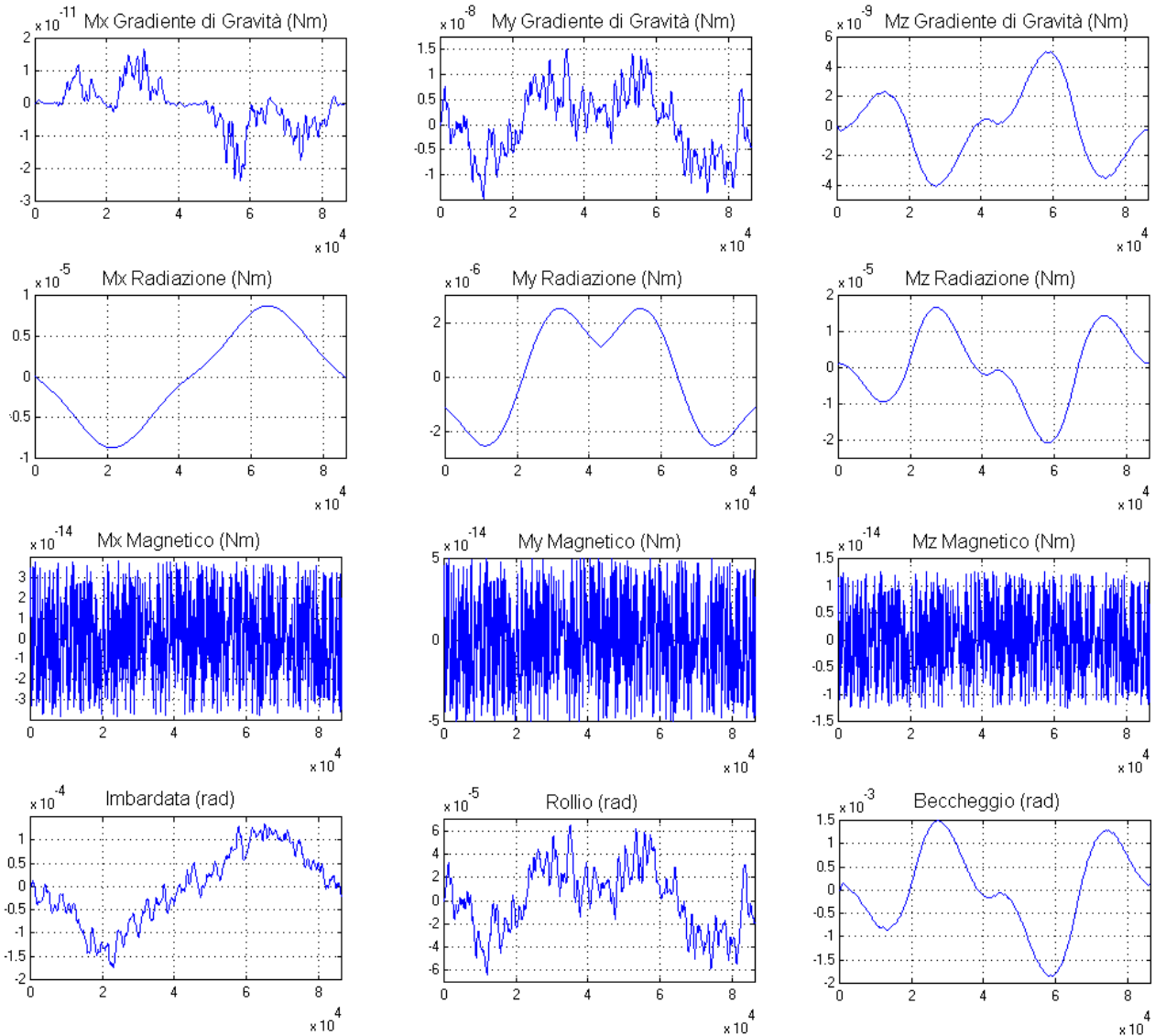
8.1 Moto controllato a partire da una condizione lontana dalla nominale

I grafici mostrano l'andamento del sistema se le condizioni iniziali pongono 10° di errore su tutti gli assi; la pulsazione del controllo su rollio/imbardata è pari a 30Ω , mentre quella sul beccheggio è 60Ω .

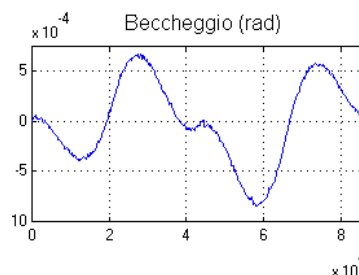


8.2 Moto controllato a partire dalla condizione nominale

I grafici mostrano l'andamento del sistema se le condizioni iniziali pongono il satellite esattamente allineato su tutti gli assi, con la giusta velocità angolare (Ω); la pulsazione del controllo su rollio/imbardata è pari a 30Ω , mentre quella sul beccheggio è 60Ω .



Le piccole “vibrazioni” sugli assi di rollio e imbardata sono probabilmente dovute all’incertezza di sensori e attuatori. Il controllo sull’asse z è il meno preciso (con un errore comunque inferiore al decimo di grado), e si può notare che “segue” il disturbo. Se si vuole un controllo più efficace si può imporre al controllo in beccheggio una pulsazione più alta, ad esempio 90Ω :



Appendice: uso del simulatore

Variabili globali

Prima di avviare il simulatore, è necessario eseguire lo script “inizio.m”. Tale script imposta i valori dei momenti d’inerzia, la matrice contenente la geometria del satellite, le matrici del montaggio dei rotori e le prestazioni del sistema di controllo. Alcune di queste variabili possono essere modificate facilmente dall’utente:

I_x I_y I_z : momenti d’inerzia rispetto ai tre assi principali.

ω : velocità nominale di spin del satellite; viene posta uguale a Ω .

f_{req} : pulsazione del controllo sugli assi x e y (espressa come multiplo di ω)

f_{attorz} : pulsazione del controllo sull’asse z (espressa come multiplo di f_{req})

smorz : smorzamento del controllo su tutti gli assi.

Altre variabili globali sono:

SU: matrice con la descrizione delle facce del satellite

RR: matrice di montaggio dei rotori

RRI: pseudoinversa di RR

I valori iniziali degli angoli di Eulero e delle velocità angolari sono impostabili direttamente sulla finestra del simulatore, nei blocchi di costante nell’angolo in basso a sinistra.

Sono presenti dei “manual switches” che permettono di “accendere e spegnere” a piacimento parte del simulatore.

Descrizione di tutti gli .m files

acca : funzione che converte il momento angolare dal riferimento degli assi corpo a quello inerziale

campob : funzione che calcola il campo magnetico

conver : funzione che converte gli angoli di Eulero φ , θ e ψ in φ' , θ' e ψ'

cosdir : funzione che calcola la matrice dei coseni direttori a partire dagli angoli di Eulero

gg : funzione che calcola il disturbo dovuto al gradiente di gravità

inizio : script che imposta i valori iniziali, lancia anche lo script superficie

rad : funzione che calcola il disturbo dovuto alla radiazione

reaz : funzione che emula il funzionamento degli attuatori

sens : funzione che emula il funzionamento dei sensori

superficie : script che genera la matrice SU con la geometria del satellite.