ESERCIZI
di
MOTORI PER AEROMOBILI

a cura di
Paolo Massioni
pmassio@hotmail.com

disponibile in rete all'indirizzo
http://pmassio.altervista.org

Alcune formule utili

Velocità del suono: $a=\sqrt{kR^{*}T}$

Numero di Mach: $\mathrm{Ma}=\dfrac{v_0}{a}$

Temperatura totale: $T^{*}=T\left(1+\dfrac{k-1}{2}\mathrm{Ma}^{2}\right)$

Pressione totale: $p^{*}=p\left(1+\dfrac{k-1}{2}\mathrm{Ma}^{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$

Trasformazioni adiabatiche e isoentropiche: $\dfrac{p_1}{p_2}=\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$

Rendimento della presa dinamica (diffusore): $\varepsilon_{PD}=\dfrac{p_{out}^{*}}{p_{in}^{*}}$

Rendimento isoentropico del compressore: $\eta_C=\dfrac{L_{ideale}^{\leftarrow}}{L_{reale}^{\leftarrow}}$

Rendimento isoentropico della turbina: $\eta_{TB}=\dfrac{L_{reale}^{\rightarrow}}{L_{ideale}^{\rightarrow}}$

Rendimento dell'ugello: $\eta_U=\dfrac{E_{reale}^{\rightarrow}}{E_{ideale}^{\rightarrow}}$

Rendimento termodinamico: $\eta_T=\dfrac{L_{utile}^{\rightarrow}}{Q^{\leftarrow}}$

Rendimento propulsivo: $\eta_P=\dfrac{Tv_0}{\frac{1}{2}\left(\left(\dot m_a+\dot m_f\right)v_{out}^{2}-\dot m_a v_0^{2}\right)}$

Rendimento globale: $\eta_G=\dfrac{Tv_0}{Q^{\leftarrow}}=\eta_T\eta_P$

Spinta (ugello adattato): $T=\left(\dot m_a+\dot m_f\right)v_{out}-\dot m_a v_0$

Spinta specifica (impulso): $I=\dfrac{T}{\dot m_a}$ o $I=\dfrac{T}{g\dot m_a}$

Consumi specifici:

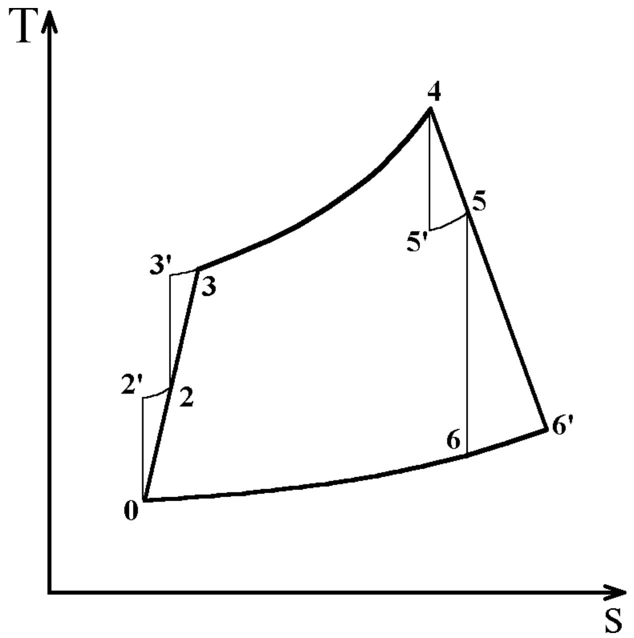
Thrust specific fuel consumption: $\mathrm{TSFC}=\dfrac{\dot m_f}{T}$

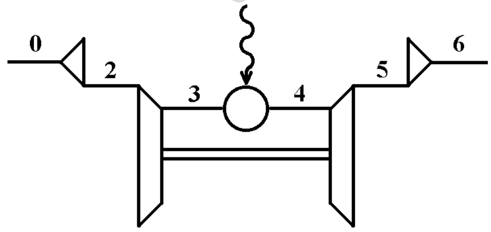
Brake specific fuel consumption: $\mathrm{BSFC}=\dfrac{\dot m_f}{\dot L_{asse}^{\rightarrow}}$

Equivalent brake specific fuel consumption: $\mathrm{EBSFC}=\dfrac{\dot m_f}{\dot L_{asse}^{\rightarrow}+v_0\left(\left(1+f\right)v_{out}-v_0\right)}$

ESERCIZIO 1

Si esaminino le prestazioni di un motore turbogetto semplice, che funziona con un ciclo reale di turbina a gas (Joule-Brayton):





Il motore funziona a 10000 m di quota:
T_0 = 225 K
p_0 = 0,24 bar
$k = 1{,}4$ (supposto costante)

$c_p = 1004 \dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$ (supposto costante)

$R^* = 287 \dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$

Caratteristiche del propulsore:
Ma = 0,85

Rapporto di compressione: $\beta = \dfrac{p_3^*}{p_2^*} = 15$

Temperatura massima: $T_4^* = 1400\ \text{K}$

Potere calorifico del carburante: $H_f = 43953 \dfrac{\text{kJ}}{\text{kg}}$

Rendimento della presa dinamica (diffusore): $\varepsilon_{PD} = 0{,}98$
Rendimento isoentropico del compressore: $\eta_C = 0{,}85$
Rendimento isoentropico della turbina: $\eta_{TB} = 0{,}90$
Rendimento dell'ugello: $\eta_U = 0{,}99$ (ugello adattato)

SOLUZIONE

Si comincia con il ricavare tutte le coordinate termodinamiche (pressione e temperatura) dei vari punti del ciclo.

Punto 0

Le caratteristiche sono quelle dell'aria all'esterno:

$T_0 = 225$ K

$p_0 = 0{,}24$ bar.

Conviene calcolare anche i valori delle grandezze totali:

$$T_0^* = T_0\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}^2\right) \cong 257{,}5\ \mathrm{K}$$

$$p_0^* = p_0\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \cong 0{,}385\ \mathrm{bar}$$

Punto 2

Da 0 a 2 (passaggio nella presa dinamica) non avvengono scambi di energia: pertanto l'entalpia totale rimane costante, e così anche la temperatura totale:

$$T_2^* = T_0^* \cong 257{,}5\ \mathrm{K}$$

Per la pressione totale, si ricorre alla definizione del rendimento della presa dinamica:

$$p_2^* = \varepsilon_{PD}\, p_0^* \cong 0{,}377\ \mathrm{bar}$$

Punto 3

Da 2 a 3 si ha il passaggio nel compressore. La pressione finale è data dal rapporto di compressione:

$$p_3^* = \beta p_2^* \cong 5{,}65\ \mathrm{bar}$$

La temperatura si ricava calcolando prima quella che si avrebbe nel caso isoentropico (3'):

$$\frac{T_{3'}^*}{T_2^*} = \left(\frac{p_{3'}^*}{p_2^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} \Rightarrow T_{3'}^* = T_2^*\beta^{\frac{k-1}{k}} \cong 558{,}2\ \mathrm{K}$$

Dalla definizione di rendimento:

$$\eta_C = \frac{L_{ideale}^{\leftarrow}}{L_{reale}^{\leftarrow}} = \frac{\dot m_a\left(h_{3'}^* - h_2^*\right)}{\dot m_a\left(h_3^* - h_2^*\right)} = \frac{c_p\left(T_{3'}^* - T_2^*\right)}{c_p\left(T_3^* - T_2^*\right)} \Rightarrow T_3^* = T_2^* + \frac{T_{3'}^* - T_2^*}{\eta_C} \cong 611{,}3\ \mathrm{K}$$

Punto 4

Da 3 a 4 si ha il passaggio nel combustore. Il rapporto stechiometrico fra la massa di combustibile e la massa di aria necessaria per bruciarla è 1:15. In realtà c'è sempre un eccesso di aria, altrimenti la temperatura in corrispondenza della turbina sarebbe eccessiva e rovinerebbe la palettatura della turbina stessa.

$$p_4^* = p_3^* \cong 5{,}65\ \mathrm{bar}$$

E' necessario calcolare la quantità di combustibile necessaria a raggiungere la temperatura voluta al punto 4 (1400 K). Si usa un bilancio di energia, le entrate sono il flusso entalpico dell'aria e il flusso di energia legato al potere calorifico del carburante, l'uscita è il flusso entalpico dei gas combusti:

$$\dot{m}_a c_p T_3^* + \dot{m}_f H_f = (\dot{m}_a + \dot{m}_f) c_p T_4^* \Rightarrow c_p T_3^* + \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_a} H_f = \left(1 + \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_a}\right) c_p T_4^*$$

si definisce:

$$f = \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_a}$$

per cui:

$$c_p T_3^* + f H_f = (1+f) c_p T_4^* \Rightarrow f = \frac{c_p T_4^* - c_p T_3^*}{H_f - c_p T_4^*} \cong 0{,}0186$$

Punto 5

Il passaggio in turbina da 4 a 5 deve fornire il lavoro necessario per mandare il compressore (in realtà la turbina preleva più lavoro di quello strettamente necessario per il compressore, perché essa alimenta tutti i sistemi dell'aereo). Inoltre, si dovrebbe tenere conto che il calore specifico non è costante al variare della temperatura, ma qui sarà supposto costante. Per questo bilancio si dovrebbe scrivere a rigore:

$$\dot{m}_a c_p (T_3^* - T_2^*) = (\dot{m}_a + \dot{m}_f) c_p (T_4^* - T_5^*)$$

per semplicità, dato che f è piccolo, si semplifica in:

$$\dot{m}_a c_p (T_3^* - T_2^*) = \dot{m}_a c_p (T_4^* - T_5^*) \Rightarrow T_5^* = T_4^* - T_3^* + T_2^* \cong 1046{,}2\ \mathrm{K}$$

Per trovare la pressione, bisogna trovare la pressione al punto 5' (raggiunto tramite una isoentropica):

$$\eta_{TB} = \frac{L_{reale}^{\rightarrow}}{L_{ideale}^{\rightarrow}} = \frac{T_4^* - T_5^*}{T_4^* - T_{5'}^*} \Rightarrow T_{5'}^* = T_4^* + \frac{T_5^* - T_4^*}{\eta_{TB}} \cong 1006{,}9\ \mathrm{K}$$

$$\frac{p_{5'}^*}{p_4^*} = \left(\frac{T_{5'}^*}{T_4^*}\right)^{\frac{k}{k-1}} \Rightarrow p_{5'}^* = p_4^* \left(\frac{T_{5'}^*}{T_4^*}\right)^{\frac{k}{k-1}} \cong 1{,}783\ \mathrm{bar}$$

Punto 6

All'uscita dall'ugello, in condizioni di adattamento, si ha la pressione statica di uscita che uguaglia la pressione esterna:

$$p_6 = p_0$$

Da 5 a 6 (passaggio nell'ugello) non ci sono scambi di energia, pertanto la portata entalpica si conserva, e anche la temperatura totale, in condizioni di isoentropia:

$$T_{6'}^* = T_5^*$$

Dalla trasformazione isoentropica e dal rendimento dell'ugello, ricavo la temperatura dei gas di scarico. Interessa quella non totale, perché servirà per il calcolo della velocità di efflusso:

$$\frac{T_{6'}}{T_5^*} = \left(\frac{p_{6'}}{p_5^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{p_0}{p_5^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} \Rightarrow T_{6'} = T_5^* \left(\frac{p_0}{p_5^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} \cong 590{,}0\ \mathrm{K}$$

$$\eta_U = \frac{L_{reale}^{\rightarrow}}{L_{ideale}^{\rightarrow}} = \frac{T_5^* - T_6}{T_5^* - T_{6'}} \Rightarrow T_6 = T_5^* + \eta_U (T_{6'} - T_5^*) \cong 594{,}2\ \mathrm{K}$$

Si può ora procedere al calcolo delle prestazioni del propulsore.

Velocità di efflusso

Da un bilancio sull'ugello:

$$c_p T_5^* = c_p T_6 + \frac{v_6^2}{2} \Rightarrow v_6 = \sqrt{2c_p\left(T_5^* - T_6\right)} \cong 952{,}7 \text{ m/s}$$

Velocità di volo

La velocità del suono è data da:

$$a = \sqrt{kR^* T_0} \cong 300{,}6 \text{ m/s}$$

Pertanto la velocità di volo sarà:

$$v_0 = a\text{Ma} \cong 255{,}6 \text{ m/s}$$

Spinta specifica

$$\frac{T}{\dot{m}_a} = (1+f)v_6 - v_0 \cong 716{,}2 \text{ m/s}$$

oppure:

$$\frac{T}{\dot{m}_a g} \cong 73{,}08 \text{ s}$$

Rendimento termodinamico

$$\eta_T = \frac{L_{utile}^{\rightarrow}}{Q^{\leftarrow}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\dot{m}_f + \dot{m}_a\right)v_6^2 - \frac{1}{2}\dot{m}_a v_0^2}{\dot{m}_f H_f} = \frac{(f+1)v_6^2 - v_0^2}{2fH_f} \cong 0{,}489$$

Rendimento propulsivo

$$\eta_P = \frac{Tv_0}{\frac{1}{2}\left(\left(\dot{m}_a + \dot{m}_f\right)v_6^2 - \dot{m}_a v_0^2\right)}$$

ritenendo *f* piccolo, e considerando l'ugello adattato, si può semplificare in:

$$\eta_P = \frac{2v_0}{v_0 + v_6} \cong 0{,}423$$

Rendimento globale

$$\eta_G = \eta_P \eta_T \cong 0{,}207$$

Consumo specifico

$$\text{TSFC} = \frac{\dot{m}_f}{T} = \frac{f}{(1+f)v_6 - v_0} \cong 01005 \frac{\text{kg/h}}{\text{N}} \cong 0{,}9853 \frac{\text{kg/h}}{\text{kgp}}$$

ESERCIZIO 2

In riferimento al motore dell'esercizio precedente, si ricavi:
1) la portata di aria necessaria per avere una spinta di 5000 kgp;
2) la potenza consumata dal compressore;
3) la potenza persa per irreversibilità nel compressore;
4) il tipo di ugello usato;
5) la spinta che si avrebbe se l'ugello fosse isoentropico e solo convergente.

SOLUZIONE

1)
La portata di aria si ricava dalla definizione di spinta specifica del motore:

$$\frac{T}{\dot{m}_a} \cong 716{,}2\ \text{m/s} \Rightarrow \dot{m}_a = \frac{T}{\frac{T}{\dot{m}_a}} \cong \frac{5000 \cdot 9{,}8\ \text{N}}{716{,}2\ \text{m/s}} = 68{,}4\ \text{kg/s}$$

2)
La potenza consumata dal compressore è:

$$P = \left(T_3^* - T_2^*\right) c_p \dot{m}_a \cong 24{,}30\ \text{MW}$$

3)
La potenza persa per irreversibilità è:

$$P_p = \left(T_3^* - T_{3'}^*\right) c_p \dot{m}_a \cong 3{,}65\ \text{MW}$$

4)
Si calcola il numero di Mach allo sbocco:

$$\text{Ma} = \frac{v_6}{a} = \frac{v_6}{\sqrt{kR^* T_6}} \cong 1{,}95$$

si tratta dunque di regime supersonico, pertanto l'ugello sarà del tipo convergente-divergente (un ugello solo convergente non può far raggiungere velocità superiori a quella del suono).

5)
Se l'ugello è solo convergente, la velocità all'uscita sarà quella del suono. Tuttavia la velocità del suono dipende dalla temperatura di uscita (che chiamiamo T_7). Da un bilancio di energia si può scrivere:

$$c_p T_5^* = c_p T_7 + \frac{v_7^2}{2} \Rightarrow c_p T_5^* = c_p T_7 + \frac{kR^* T_7}{2} \Rightarrow T_7 = \frac{T_5^*}{1 + \frac{kR^*}{2c_p}} = \frac{T_5^*}{\frac{2c_p + kR^*}{2c_p}} = T_5^* \frac{2c_p}{2c_p + \frac{c_p}{c_v}\left(c_p - c_v\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_7 = T_5^* \frac{2}{2 + \frac{1}{c_v}\left(c_p - c_v\right)} = T_5^* \frac{2}{2 + k - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_7 = T_5^* \frac{2}{k+1}$$

e dalla isoentropica si ottiene:

$$p_7 = p_5^* \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Nota: questa stessa formula si può ricavare dalla formula della pressione totale, ponendo Ma = 1:

$$p_5^* = p_7^* \Rightarrow$$

$$p_5^* = p_7^* = p_7 \left(1 + \frac{k-1}{2} \mathrm{Ma}^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_7 = p_5^* \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Introducendo i numeri si ottiene:

$$T_7 \cong 871{,}8 \text{ K}$$

$$p_7 \cong 0{,}942 \text{ bar}$$

Si noti come la pressione alla sezione di uscita non sia la pressione esterna: l'ugello non è adattato (la cosa è possibile solo in regime sonico o supersonico). La velocità di efflusso è dunque la velocità del suono all'uscita:

$$v_7 = \sqrt{kR^* T_7} \cong 591{,}8 \text{ m/s}$$

Per il calcolo della spinta bisogna calcolare l'area della sezione di uscita:

$$A_e = \frac{\dot{m}_a}{\rho_7 v_7} = \frac{\dot{m}_a}{\frac{p_7}{R^* T_7} v_7} \cong 0{,}307 \text{ m}^2$$

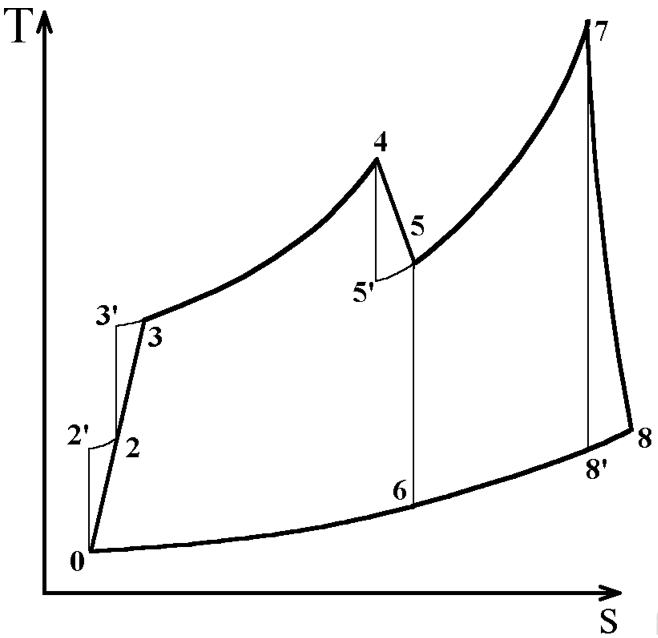
La spinta in condizioni di non adattamento è, ignorando il flusso di carburante, data da:

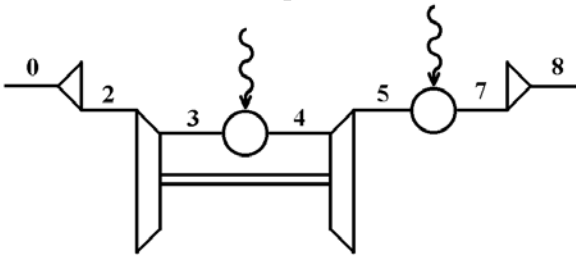
$$T = \dot{m}_a (v_7 - v_0) + A_e (p_7 - p_0) \cong 44540 \text{ N} \cong 4546 \text{ kgp}$$

Si noti come la spinta nel caso di ugello non adattato sia inferiore al caso di ugello adattato; prima infatti la spinta era di 5000 kgp. La perdita di spinta in questo caso è stata molto consistente (circa il 10%); tuttavia in certi tipi di motori a volte si preferisce avere un ugello non adattato solo convergente piuttosto che complicare il progetto con un ugello convergente-divergente; questo a patto che la perdita di spinta sia contenuta (dell'ordine del 2%).

ESERCIZIO 3

In riferimento al motore degli esercizi precedenti, si ricavino la spinta e le prestazioni supponendo che venga acceso un postcombustore in grado di portare il fluido alla temperatura di 1800 K. Si supponga l'ugello adattato. Inoltre si calcolino le sezioni di uscita dell'ugello necessarie nei casi di postbruciatore acceso e spento.





T_7 = 1800 K
Rendimento dell'ugello: $\eta_U = 0{,}99$ (ugello adattato)

SOLUZIONE

Per calcolare la nuova spinta, è necessario il calcolo di T_8:

$$T_{8'} = T_7^* \left(\frac{p_8}{p_7} \right)^{\frac{k-1}{k}} \cong 1014{,}2\,\mathrm{K}$$

$$\eta_U = \frac{L_{reale}^{\rightarrow}}{L_{ideale}^{\rightarrow}} = \frac{T_7^* - T_8}{T_7^* - T_{8'}} \Rightarrow T_8 = T_7^* + \eta_U \left(T_{8'} - T_7^* \right) \cong 1022{,}1\,\mathrm{K}$$

Velocità di efflusso

$$v_8 = \sqrt{2c_p \left(T_7^* - T_8 \right)} \cong 1249{,}8\,\mathrm{m/s}$$

Spinta

$$T' \cong \dot{m}_a \left(v_8 - v_0 \right) \cong 6940\,\mathrm{kgp}$$

L'aumento di spinta è stato considerevole, di circa il 38%.

Spinta specifica

$$\frac{T'}{\dot{m}_a} \cong (v_8 - v_0) \cong 101{,}5\ \text{s}$$

Anche la spinta specifica è aumentata.

E' interessante andare a vedere come vengono modificati i consumi specifici. Per questo occorre calcolare quanto carburante viene speso nella seconda combustione, con un bilancio di energia:

$$(\dot{m}_a + \dot{m}_f)c_p T_5^* + \dot{m}_{f'} H_f = (\dot{m}_a + \dot{m}_f + \dot{m}_{f'})c_p T_7^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+f)c_p T_5^* + f' H_f = (1 + f + f')c_p T_7^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f' = \frac{c_p (1+f)(T_7^* - T_5^*)}{H_f - c_p T_7^*} \cong 1{,}0183$$

si verifica che:

$$f' + f < \frac{1}{15}$$

altrimenti la seconda combustione non potrebbe avvenire per mancanza di comburente a sufficienza.

Consumo specifico

$$\text{TSFC} = \frac{\dot{m}_f + \dot{m}_{f'}}{T} \cong 1{,}309\ \frac{\text{kg/h}}{\text{kgp}}$$

Qui si paga l'aumento di spinta: il TSFC sale di circa il 32% (anche di più nelle situazioni reali). Il consumo di carburante è in senso assoluto circa raddoppiato: questo significa che la postcombustione potrà essere usata soltanto per brevi intervalli di tempo, in situazioni critiche (decollo a pieno carico, decollo da portaerei, fuga, ecc.). Il Concorde è l'unico aereo commerciale a sfruttare la postcombustione, ne fa uso nel passaggio da regime subsonico a supersonico. In transonico infatti le resistenze hanno un picco e il postcombustore aiuta a vincerle; dopodiché, una volta giunti in supersonico il postcombustore può essere spento.

Rendimento termodinamico

$$\eta_T = \frac{L_{utile}^{\rightarrow}}{Q^{\leftarrow}} = \frac{\frac{1}{2}(\dot{m}_f + \dot{m}_{f'} + \dot{m}_a)v_6^2 - \frac{1}{2}\dot{m}_a v_0^2}{(\dot{m}_f + \dot{m}_{f'})H_f} = \frac{(f + f' + 1)v_6^2 - v_0^2}{2(f + f')H_f} \cong 0{,}479$$

Rendimento propulsivo (al momento dell'accensione)

Ritenendo *f* piccolo, e considerando l'ugello adattato, si può semplificare in:

$$\eta_P = \frac{2v_0}{v_0 + v_8} \cong 0{,}340$$

Rendimento globale

$$\eta_G = \eta_P \eta_T \cong 0{,}163$$

E' sceso di molto, soprattutto a causa del rendimento propulsivo. Tuttavia si può pensare che con l'accensione del postbruciatore la velocità di volo aumenti e con essa anche il rendimento propulsivo.

Sezioni di uscita

Per il caso isoentropico varrebbe la formula:

$$\frac{A_8}{A_6}=\frac{\dfrac{\dot m}{\rho_8 v_8}}{\dfrac{\dot m}{\rho_6 v_6}}=\frac{p_6 v_6 T_8}{p_8 v_8 T_6}=\frac{v_6 T_8}{v_8 T_6}=\frac{T_8\sqrt{2c_p\left(T_5^*-T_6\right)}}{T_6\sqrt{2c_p\left(T_7^*-T_8\right)}}=\frac{T_8\sqrt{T_6\left(\dfrac{T_5^*}{T_6}-1\right)}}{T_6\sqrt{T_8\left(\dfrac{T_7^*}{T_8}-1\right)}}=\frac{\sqrt{T_8\left(\left(\dfrac{p_5^*}{p_6}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1\right)}}{\sqrt{T_6\left(\left(\dfrac{p_7^*}{p_8}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1\right)}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{A_8}{A_6}=\sqrt{\frac{T_8}{T_6}}$$

(si ricordi che $p_5 = p_7$ e $p_6 = p_8$) ma non è questo il caso, perché l'ugello non è isoentropico. Pertanto si dovrà fare uso delle temperature reali all'uscita dell'ugello:

$$A_6=\frac{\dot m_a\left(1+f+f'\right)}{\rho_6 v_6}\cong\frac{T_6 R^*\dot m_a}{p_6 v_6}\cong 0{,}51\,\mathrm{m}^2$$

$$A_8\cong\frac{T_8 R^*\dot m_a}{p_8 v_8}\cong 0{,}69\,\mathrm{m}^2$$

L'adattamento dell'ugello dipende soltanto dal rapporto delle pressioni (che non deve superare quello critico) e pertanto non differisce nei due casi: se è adattato senza postbruciatore, sarà adattato anche con esso. Il risultato trovato tuttavia segnala che motori con postbruciatori dovranno avere geometria dell'ugello variabile, nel senso che devono poter allargare la sezione di uscita quando il postbruciatore viene acceso. Se ciò non avvenisse, il motore non riuscirebbe a scaricare tutta la portata e quindi il flusso di massa attraverso il motore diminuirebbe (diminuendo anche la spinta e vanificando la postcombustione). Geometria variabile non significa che l'ugello passi da convergente a convergente-divergente; significa cambiamento di dimensioni.

ESERCIZIO 4

In riferimento al motore dell'esercizio 1, si dimensioni la presa dinamica in modo che al compressore il numero di Ma sia 0,5.

Rendimento della presa dinamica (diffusore): $\varepsilon_{PD} = 0{,}98$

SOLUZIONE

Sezione di ingresso

$$A_0 = \frac{T_0 R^* \dot{m}_a}{p_0 v_0} \cong 0{,}72\ \mathrm{m}^2$$

Sezione a monte del compressore

La temperatura totale si conserva nella presa dinamica:

$$T_2^* = T_0^* \Rightarrow T_2\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2\right) = T_0\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_0^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 = T_0 \frac{\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_0^2\right)}{\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2\right)} \cong 245{,}3\ \mathrm{K}$$

$$v_2 = 0{,}5\sqrt{kR^* T_2} \cong 156{,}9\ \mathrm{m/s}$$

E' necessario calcolare anche p_2:

$$p_2^* = \varepsilon_{PD} p_0^* \Rightarrow p_2\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = \varepsilon_{PD} p_0\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_0^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_2 = \varepsilon_{PD} p_0 \left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}} \cong 0{,}318\ \mathrm{bar}$$

E dunque:

$$A_2 = \frac{T_2 R^* \dot{m}_a}{p_2 v_2} \cong 0{,}97\ \mathrm{m}^2$$

Lunghezza

La lunghezza è un parametro difficile da valutare; il diffusore non deve essere né troppo lungo, né troppo corto. Se fosse troppo lungo, peserebbe e costerebbe molto, e inoltre il fluido sarebbe costretto a passare su un condotto dalla superficie maggiore e ciò causerebbe perdite di carico maggiori (rendimento ε minore). Se fosse troppo corto sarebbe anche troppo "brusca" la deviazione del flusso all'interno e ciò causerebbe distacchi di vena e problemi al compressore.
Per stimare una lunghezza di riferimento, si può considerare che da osservazioni sperimentali si ha una buona presa dinamica con parete ad angolo di divergenza di semiapertura pari a 5°. Da cui (considerando le sezioni circolari):

$$L = \frac{R_2 - R_0}{\tan 5°} = \frac{\sqrt{\frac{A_2}{\pi}} - \sqrt{\frac{A_0}{\pi}}}{\tan 5°} \cong 0{,}88\ \mathrm{m}$$

ESERCIZIO 5

Un motore opera nelle seguenti condizioni:
T_0 = 216,7 K
p_0 = 0,11 bar
Ma = 2
Velocità equivalente del getto: v_j = 1009 m/s
Potere calorifico del carburante: $H_f = 43953\,\dfrac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$
Consumo specifico: $\mathrm{TSFC} = 1{,}19\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kgp\,h}}$
$k = 1{,}4$ (supposto costante)
$R^* = 287\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$

Calcolare i rendimenti di tale macchina e il rapporto aria/combustibile, commentando quest'ultimo risultato.

SOLUZIONE

Velocità di volo
$v_0 = 2\sqrt{kR^*T_0} \cong 590{,}2\ \mathrm{m/s}$

Rendimento propulsivo
Si trova immediatamente con la formula semplificata (si trascurano i flussi di carburante):

$$\eta_P \cong \frac{2v_0}{v_0 + v_j} \cong 0{,}738$$

Rendimento termodinamico:
Ancora trascurando i flussi di carburante si trova:

$$\eta_T = \frac{L^{\rightarrow}_{utile}}{Q^{\leftarrow}} \cong \frac{\frac{1}{2}\dot{m}\left(v_j^2 - v_0^2\right)}{\dot{m}\left(v_j - v_0\right)\mathrm{TSFC}\,H_f} = \frac{v_j + v_0}{2\mathrm{TSFC}\,H_f} \cong 0{,}539$$

Attenzione: si ricordi che

$$\mathrm{TSFC} = 1{,}19\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kgp\,h}} \cong 3{,}373\cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{N\,s}}$$

Rendimento globale
$\eta_G = \eta_P \eta_T \cong 0{,}398$

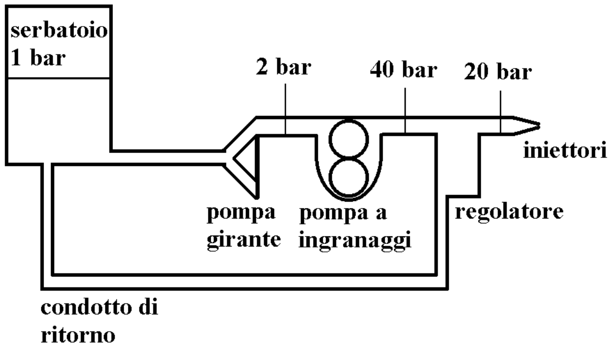
Flusso di combustibile

$$\mathrm{TSFC} = \frac{\dot{m}_f}{T} \cong \frac{f\dot{m}_a}{\dot{m}_a\left(v_j - v_0\right)} \Rightarrow f \cong \mathrm{TSFC}\left(v_j - v_0\right) \cong 0{,}0141 \cong \frac{1}{71}$$

Si tratta di una diluizione molto forte; questo si può giustificare con il fatto che il velivolo sta andando a numero di Mach pari a 2, e che quindi nella presa dinamica si verranno a creare temperature già abbastanza elevate; per non andare oltre le temperature massime consentite è necessario ridurre il flusso di carburante rispetto a quello dell'aria.

ESERCIZIO 6

Si consideri il seguente schema:



Esso rappresenta il sistema di pompaggio del carburante per un motore a getto. Calcolare la potenza complessiva delle pompe.

Dati:
Spinta: $T = 2500$ kgp
Impulso: $I = 50$ s
Consumo specifico: $\text{TSFC} = 0{,}9\ \dfrac{\text{kg}}{\text{kgp h}}$
Densità del carburante: $\rho_f = 800\ \text{kg/m}^3$
Rendimento delle pompe: $\eta_P = 0{,}6$

SOLUZIONE

Per prima cosa è necessario calcolare la portata di combustibile circolante. Dal TSFC si ha:
$\dot{m}_f = \text{TSFC}\, T \cong 2250\ \text{kg/h} \cong 0{,}625\ \text{kg/s}$
Quella calcolata è la portata di carburante utilizzata dal motore; ma in realtà le pompe processano una quantità maggiore, come illustrato nello schema. Si può stimare che in realtà la portata pompata di carburante sia 2,2 volte quella calcolata:
$\dot{m}_{pomp} \cong 1{,}375\ \text{kg/s}$

Dall'impulso si ha:
$\dot{m}_a = \dfrac{T}{I} \cong 50\ \text{kg/s}$
questo calcolo non è strettamente necessario ai fini della risposta al quesito proposto, tuttavia può essere utile per verificare che le portate di aria e combustibile sono compatibili.

Proseguendo, occorre scrivere un bilancio di energia da monte e valle delle pompe:
$$\dot{m}_{pomp}\left(\frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 + h_1\right) + \eta_P \dot{L}^{\leftarrow} = \dot{m}_{pomp}\left(\frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 + h_2\right)$$
trascurando i termini cinetici e gravitazionali, e ricordando l'espressione dell'entalpia per i mezzi incomprimibili si può scrivere:

$$\dot{m}_{pomp}\left(cT_1+\frac{p_1}{\rho}\right)+\eta_P\dot{L}^{\leftarrow}=\dot{m}_{pomp}\left(cT_2+\frac{p_2}{\rho}\right)$$

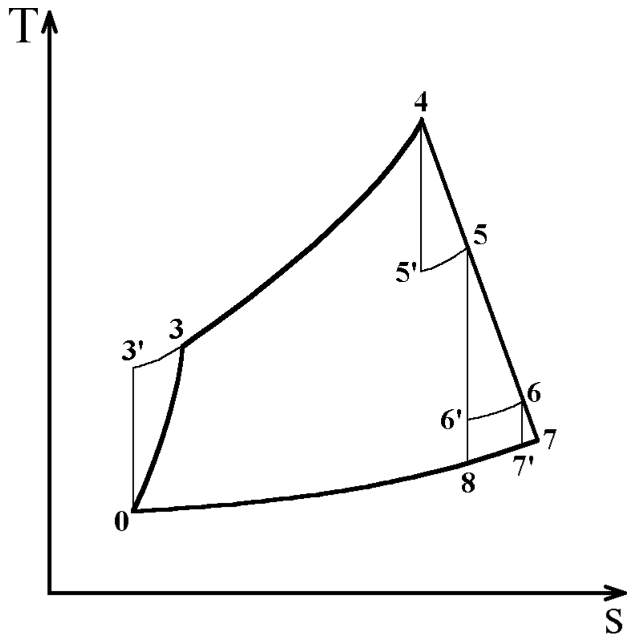
anche la differenza di temperatura fra monte e valle si può trascurare, da cui:

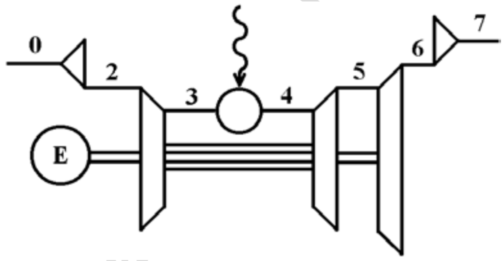
$$\dot{L}^{\leftarrow}=\frac{\dot{m}_{pomp}\left(p_2-p_1\right)}{\eta_P\rho}\cong 11{,}2\ \mathrm{kW}$$

La potenza trovata è consistente ma comunque molto piccola rispetto a quella del motore (dell'ordine delle decine di MW).

ESERCIZIO 7

Si calcolino la portata d'aria e le prestazioni di un motore turboelica a punto fisso, che funziona con un ciclo reale di turbina a gas (Joule-Brayton):





Il motore funziona a 0 m di quota:
$T_0 = 288$ K
$p_0 = 1$ bar
$k = 1{,}4$ (supposto costante)
$c_p = 1004 \dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$ (supposto costante)
$R^* = 287 \dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$

Caratteristiche del propulsore:
Ma = 0
Potenza all'asse: $\dot{L}^{\rightarrow}_{asse} = 3660\,\text{kW}$
Rapporto di compressione: $\beta = \dfrac{p_3^*}{p_2^*} = 9{,}5$
Temperatura massima: $T_4^* = 1350\,\text{K}$
Potere calorifico del carburante: $H_f = 43953 \dfrac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
Rendimento isoentropico del compressore: $\eta_C = 0{,}85$
Rendimento isoentropico delle turbine: $\eta_{TB} = 0{,}90$
Rendimento dell'ugello: $\eta_U = 0{,}99$ (ugello adattato)
Rapporto alfa (salto entalpico assegnato all'ugello fratto salto entalpico per l'elica): $\alpha = 0{,}1$

SOLUZIONE

Si comincia con il ricavare tutte le coordinate termodinamiche (pressione e temperatura) dei vari punti del ciclo.

Punto 0
Le caratteristiche sono quelle dell'aria all'esterno:
$T_0 = 288$ K
$p_0 = 1$ bar.
I valori delle grandezze totali coincidono con quelli statici, dato che il motore è a punto fisso.

Punto 2
Da 0 a 2 (passaggio nella presa dinamica) non avviene nulla: il motore è fermo.

Punto 3
Da 2 a 3 si ha il passaggio nel compressore. La pressione finale è data dal rapporto di compressione:
$p_3^* = \beta p_2^* \cong 9{,}5\ \text{bar}$
La temperatura si ricava calcolando prima quella che si avrebbe nel caso isoentropico (3'):

$$\frac{T_{3'}^*}{T_2^*} = \left(\frac{p_{3'}^*}{p_2^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} \Rightarrow T_{3'}^* = T_2^* \beta^{\frac{k-1}{k}} \cong 548{,}0\ \text{K}$$

Dalla definizione di rendimento:

$$\eta_C = \frac{L_{ideale}^{\leftarrow}}{L_{reale}^{\leftarrow}} = \frac{\dot{m}_a\left(h_{3'}^* - h_2^*\right)}{\dot{m}_a\left(h_3^* - h_2^*\right)} = \frac{c_p\left(T_{3'}^* - T_2^*\right)}{c_p\left(T_3^* - T_2^*\right)} \Rightarrow T_3^* = T_2^* + \frac{T_{3'}^* - T_2^*}{\eta_C} \cong 593{,}9\ \text{K}$$

Punto 4
Da 3 a 4 si ha il passaggio nel combustore. Il rapporto stechiometrico fra la massa di combustibile e la massa di aria necessaria per bruciarla è 1:15. In realtà c'è sempre un eccesso di aria, altrimenti la temperatura in corrispondenza della prima turbina sarebbe eccessiva e rovinerebbe la palettatura della turbina stessa.
$p_4^* = p_3^* \cong 9{,}5\ \text{bar}$
E' necessario calcolare la quantità di combustibile necessaria a raggiungere la temperatura voluta al punto 4 (1350 K). Si usa un bilancio di energia, le entrate sono il flusso entalpico dell'aria e il flusso di energia legato al potere calorifico del carburante, l'uscita è il flusso entalpico dei gas combusti:

$$\dot{m}_a c_p T_3^* + \dot{m}_f H_f = \left(\dot{m}_a + \dot{m}_f\right) c_p T_4^* \Rightarrow c_p T_3^* + \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_a} H_f = \left(1 + \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_a}\right) c_p T_4^*$$

si definisce:

$$f = \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_a}$$

per cui:

$$c_p T_3^* + f H_f = (1 + f) c_p T_4^* \Rightarrow f = \frac{c_p T_4^* - c_p T_3^*}{H_f - c_p T_4^*} \cong 0{,}0178$$

Punto 5

Il passaggio nel primo stadio di turbina da 4 a 5 deve fornire il lavoro necessario per mandare il compressore (in realtà la turbina preleva più lavoro di quello strettamente necessario per il compressore, perché essa alimenta tutti i sistemi dell'aereo). Inoltre, si dovrebbe tenere conto che il calore specifico non è costante al variare della temperatura, ma qui sarà supposto costante. Per questo bilancio si dovrebbe scrivere a rigore:

$$\dot{m}_a c_p \left(T_3^* - T_2^*\right) = \left(\dot{m}_a + \dot{m}_f\right) c_p \left(T_4^* - T_5^*\right)$$

per semplicità, dato che f è piccolo, si semplifica in:

$$\dot{m}_a c_p \left(T_3^* - T_2^*\right) = \dot{m}_a c_p \left(T_4^* - T_5^*\right) \Rightarrow T_5^* = T_4^* - T_3^* + T_2^* \cong 1044{,}1\ \mathrm{K}$$

Per trovare la pressione, bisogna trovare la pressione al punto 5' (raggiunto tramite una isoentropica):

$$\eta_{TB} = \frac{L_{reale}^{\rightarrow}}{L_{ideale}^{\rightarrow}} = \frac{T_4^* - T_5^*}{T_4^* - T_{5'}^*} \Rightarrow T_{5'}^* = T_4^* + \frac{T_5^* - T_4^*}{\eta_{TB}} \cong 1010{,}1\ \mathrm{K}$$

$$\frac{p_{5'}^*}{p_4^*} = \left(\frac{T_{5'}^*}{T_4^*}\right)^{\frac{k}{k-1}} \Rightarrow p_{5'}^* = p_4^* \left(\frac{T_{5'}^*}{T_4^*}\right)^{\frac{k}{k-1}} \cong 3{,}44\ \mathrm{bar}$$

Punto 6

Il passaggio nel secondo stadio di turbina da 5 a 6 deve fornire il lavoro necessario per l'elica, cioè la potenza all'albero richiesta. L'isoentropica da 5 a 6 sfrutta nove decimi del salto entalpico fra 5 e 8, come appare chiaro dal valore del rapporto alfa. Pertanto si deve definire il punto 8 (la cui pressione è quella esterna):

$$\frac{T_8}{T_5^*} = \left(\frac{p_0}{p_5^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} \Rightarrow T_8 = T_5^* \left(\frac{p_0}{p_5^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} \cong 733{,}6\ \mathrm{K}$$

Ora si assegna il salto entalpico dovuto alla turbina:

$$\left(1-\alpha\right)\dot{m}_a c_p \left(T_5^* - T_8\right) = \dot{m}_a c_p \left(T_5^* - T_{6'}^*\right) \Rightarrow T_{6'}^* = T_5^* - \left(1-\alpha\right)\left(T_5^* - T_8\right) \cong 764{,}7\ \mathrm{K}$$

Dal rendimento:

$$\eta_{TB} = \frac{L_{reale}^{\rightarrow}}{L_{ideale}^{\rightarrow}} = \frac{T_5^* - T_6^*}{T_5^* - T_{6'}^*} \Rightarrow T_6^* = T_5^* - \eta_{TB}\left(T_5^* - T_{6'}^*\right) \cong 792{,}6\ \mathrm{K}$$

La pressione si ottiene dall'isoentropica:

$$\frac{p_{6'}^*}{p_5^*} = \left(\frac{T_{6'}^*}{T_5^*}\right)^{\frac{k}{k-1}} \Rightarrow p_6^* = p_{6'}^* = p_5^* \left(\frac{T_{6'}^*}{T_5^*}\right)^{\frac{k}{k-1}} \cong 1{,}16\ \mathrm{bar}$$

Flusso di aria

Ora è possibile calcolare la portata di aria:

$$\dot{L}_{asse}^{\rightarrow} = \dot{m}_a c_p \left(T_5^* - T_6^*\right) \Rightarrow \dot{m}_a = \frac{\dot{L}_{asse}^{\rightarrow}}{c_p \left(T_5^* - T_6^*\right)} \cong 14{,}5\ \mathrm{kg/s}$$

Punto 7

All'uscita dall'ugello, in condizioni di adattamento, si ha la pressione statica di uscita che uguaglia la pressione esterna:

$$p_7 = p_0$$

Da 6 a 7 (passaggio nell'ugello) non ci sono scambi di energia, pertanto la portata entalpica si conserva, e anche la temperatura totale, in condizioni di isoentropia:

$$T_{7'}^* = T_6^*$$

Dalla trasformazione isoentropica e dal rendimento dell'ugello, ricavo la temperatura dei gas di scarico. Interessa quella non totale, perché servirà per il calcolo della velocità di efflusso:

$$\frac{T_{7'}}{T_6^*} = \left(\frac{p_{7'}}{p_6^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{p_0}{p_6^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} \Rightarrow T_{7'} = T_6^* \left(\frac{p_0}{p_6^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} \cong 760{,}0\ \mathrm{K}$$

$$\eta_U = \frac{L_{reale}^{\rightarrow}}{L_{ideale}^{\rightarrow}} = \frac{T_6^* - T_7}{T_6^* - T_{7'}} \Rightarrow T_7 = T_6^* + \eta_U \left(T_{7'} - T_6^*\right) \cong 760{,}9\ \mathrm{K}$$

Si può ora procedere al calcolo delle prestazioni del propulsore.

Velocità di efflusso

Da un bilancio sull'ugello:

$$c_p T_6^* = c_p T_7 + \frac{v_7^2}{2} \Rightarrow v_7 = \sqrt{2c_p\left(T_6^* - T_7\right)} \cong 252{,}3\ \mathrm{m/s}$$

Rendimento termodinamico

$$\eta_T = \frac{L_{utile}^{\rightarrow}}{Q^{\leftarrow}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\dot{m}_f + \dot{m}_a\right)v_7^2 + \dot{L}_{asse}^{\rightarrow}}{\dot{m}_f H_f} = \frac{\left(f+1\right)v_7^2 + 2\frac{\dot{L}_{asse}^{\rightarrow}}{\dot{m}_a}}{2fH_f} \cong 0{,}36$$

Rendimento propulsivo

$$\eta_P = 0$$

Infatti la potenza propulsiva del motore è nulla a punto fisso.

Consumo specifico

$$\mathrm{BSFC} = \frac{\dot{m}_f}{\dot{L}_{asse}^{\rightarrow}} \cong 0{,}254\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kW\ h}}$$

ESERCIZIO 8

Si esegua il dimensionamento di massima di un diffusore subsonico facente parte di un propulsore aeronautico, assegnate le seguenti specifiche.

Portata di aria in ingresso: $\dot{m} = 20\ \text{kg/s}$
Velocità all'ingresso: $v_1 = 250\ \text{m/s}$
Temperatura all'ingresso: $T_1 = 250\ \text{K}$
Densità all'ingresso: $\rho_1 = 0{,}5\ \text{kg/m}^3$
Numero di Mach all'uscita: $\text{Ma}_2 = 0{,}5$
Rendimento della presa dinamica: $\varepsilon_{PD} = 0{,}95$

SOLUZIONE

Il dimensionamento di massima di una presa subsonica è fatto essenzialmente con l'equazione di continuità all'imbocco e allo sbocco del diffusore.

Sezione di ingresso

$$A_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1 v_1} \cong 0{,}16\ \text{m}^2$$

Torna utile anche calcolare il numero di Mach all'ingresso:

$$\text{Ma}_1 = \frac{v_1}{\sqrt{kR^* T_1}} \cong 0{,}779$$

Sezione di uscita

La temperatura totale si conserva nella presa dinamica:

$$T_2^* = T_1^* \Rightarrow T_2\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_2^2\right) = T_1\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_1^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_1^2\right)}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_2^2\right)} \cong 270{,}0\ \text{K}$$

$$v_2 = 0{,}5\sqrt{kR^* T_2} \cong 164{,}7\ \text{m/s}$$

E' necessario calcolare anche p_1 e p_2:

$$p_1 = \rho_1 R^* T_1 \cong 0{,}359\ \text{bar}$$

$$p_2^* = \varepsilon_{PD}\, p_1^* \Rightarrow p_2\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = \varepsilon_{PD}\, p_1\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_2 = \varepsilon_{PD}\, p_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \cong 0{,}446\ \text{bar}$$

E dunque:

$$A_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 v_2} = \frac{T_2 R^* \dot{m}}{p_2 \mathrm{Ma}_2 \sqrt{k R^* T_2}} \cong 0{,}211\,\mathrm{m}^2$$

Lunghezza

Per stimare una lunghezza di riferimento, si può considerare che da osservazioni sperimentali si ha una buona presa dinamica con parete ad angolo di divergenza di semiapertura pari a 5°. Da cui (considerando le sezioni circolari):

$$L = \frac{R_2 - R_1}{\tan 5°} = \frac{\sqrt{\frac{A_2}{\pi}} - \sqrt{\frac{A_1}{\pi}}}{\tan 5°} \cong 0{,}383\,\mathrm{m}$$

ESERCIZIO 9

Si esegua il dimensionamento di massima di un diffusore supersonico ad onda d'urto normale, assegnate le seguenti specifiche.

Portata di aria in ingresso: $\dot{m} = 20\,\text{kg/s}$
Quota di volo: $z = 10\,\text{km}$
Numero di Mach di volo: $\text{Ma}_0 = 1{,}5$
Numero di Mach all'uscita: $\text{Ma}_2 = 0{,}5$
Rendimento della presa dinamica (parte subsonica): $\varepsilon_{PD} = 0{,}95$

SOLUZIONE

Condizioni operative
Si ricavano facilmente dalle formule empiriche dell'aria tipo (con z in km):
$$T_0 \cong (288{,}16 - 6{,}5 z_{km})\,\text{K} \cong 223{,}2\,\text{K}$$
$$p_0 \cong 1{,}013\left(1 - \frac{z_{km}}{44{,}3}\right)^{5{,}25} \text{bar} \cong 0{,}264\,\text{bar}$$

Condizioni a valle dell'onda d'urto normale
Il flusso incontra, prima di entrare nel diffusore vero e proprio, un'onda d'urto normale che tramuta il flusso in subsonico. Il calcolo delle condizioni a valle dell'onda (denotate dall'indice 1) è effettuabile tramite alcune formule:
$$\text{Ma}_1 = \sqrt{\frac{\text{Ma}_0^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1}\text{Ma}_0^2 - 1}} \cong 0{,}701$$
$$p_1 = \left(\frac{2k}{k+1}\text{Ma}_0^2 - \frac{k-1}{k+1}\right) p_0 \cong 0{,}649\,\text{bar}$$
Si noti che la pressione statica aumenta, ma quella totale diminuisce (l'onda d'urto è in processo non isoentropico); la temperatura totale invece rimarrà invariata dato che il fenomeno è considerato adiabatico.
$$T_0^* = T_1^* \Rightarrow T_1 = T_0 \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_0^2\right)}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_1^2\right)} \cong 294{,}7\,\text{K}$$

Il dimensionamento ora prosegue con il procedimento usato per le prese subsoniche.

Sezione di ingresso
$$A_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1 v_1} = \frac{T_1 R^* \dot{m}}{p_1 \text{Ma}_1 \sqrt{k R^* T_1}} \cong 0{,}108\,\text{m}^2$$

Sezione di uscita
La temperatura totale si conserva nella presa dinamica:

$$T_2^* = T_1^* \Rightarrow T_2\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2\right) = T_1\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \frac{\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)}{\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2\right)} \cong 308{,}2\ \mathrm{K}$$

$$v_2 = 0{,}5\sqrt{kR^* T_2} \cong 176{,}0\ \mathrm{m/s}$$

E' necessario calcolare anche p_2:

$$p_2^* = \varepsilon_{PD} p_1^* \Rightarrow p_2\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = \varepsilon_{PD} p_1\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_2 = \varepsilon_{PD} p_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \cong 0{,}721\ \mathrm{bar}$$

E dunque:

$$A_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 v_2} = \frac{T_2 R^* \dot{m}}{p_2 \mathrm{Ma}_2 \sqrt{kR^* T_2}} \cong 0{,}139\ \mathrm{m}^2$$

Lunghezza
Per stimare una lunghezza di riferimento, si può considerare che da osservazioni sperimentali si ha una buona presa dinamica con parete ad angolo di divergenza di semiapertura pari a 5°. Da cui (considerando le sezioni circolari):

$$L = \frac{R_2 - R_1}{\tan 5°} = \frac{\sqrt{\frac{A_2}{\pi}} - \sqrt{\frac{A_1}{\pi}}}{\tan 5°} \cong 0{,}285\ \mathrm{m}$$

Rendimento complessivo della presa dinamica

$$\varepsilon_{PD}^* = \frac{p_2^*}{p_0^*} = \frac{p_2}{p_0}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2}{1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_0^2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \cong 0{,}88$$

ESERCIZIO 10

Si esegua il dimensionamento di massima di un diffusore supersonico a diffusione esterna ("a cono"), con una onda d'urto obliqua a 45°.

Sono assegnate le seguenti specifiche:

Portata di aria in ingresso: $\dot{m} = 40\,\text{kg/s}$
Quota di volo: $z = 10\,\text{km}$
Numero di Mach di volo: $\text{Ma}_0 = 1{,}8$
Numero di Mach all'uscita: $\text{Ma}_2 = 0{,}5$
Rendimento della presa dinamica (parte subsonica): $\varepsilon_{PD} = 0{,}92$

SOLUZIONE

Condizioni operative
Si ricavano facilmente dalle formule empiriche dell'aria tipo (con z in km):
$T_0 \cong (288{,}16 - 6{,}5 z_{km})\,\text{K} \cong 223{,}2\,\text{K}$

$$p_0 \cong 1{,}013\left(1 - \frac{z_{km}}{44{,}3}\right)^{5,25}\ \text{bar} \cong 0{,}264\ \text{bar}$$

Condizioni a valle dell'onda d'urto obliqua
Il flusso incontra l'onda d'urto obliqua, che influisce soltanto sulla componente normale del moto; pertanto andranno separati il numero di Mach normale e quello tangenziale:

$$\begin{cases} \text{Ma}_{0\text{n}} = \text{Ma}_0 \sin(45°) \cong 1{,}273 \\ \text{Ma}_{0\text{t}} = \text{Ma}_0 \cos(45°) \cong 1{,}273 \end{cases}$$

L'onda d'urto obliqua è ora trattabile come un'onda d'urto normale relativa alla parte normale del numero di Mach. Il calcolo delle condizioni a valle dell'onda (denotate dall'indice 0') è effettuabile tramite le formule dell'onda normale:

$$\text{Ma}_{0'\text{n}} = \sqrt{\frac{\text{Ma}_{0\text{n}}^2 + \dfrac{2}{k-1}}{\dfrac{2k}{k-1}\text{Ma}_{0\text{n}}^2 - 1}} \cong 0{,}800$$

$$p_{0'} = \left(\frac{2k}{k+1}\text{Ma}_{0\text{n}}^2 - \frac{k-1}{k+1}\right) p_0 \cong 0{,}445\ \text{bar}$$

La temperatura totale rimarrà invariata dato che il fenomeno è considerato adiabatico:

$$T_0^* = T_{0'}^* \Rightarrow T_{0'} = T_0 \frac{\left(1 + \dfrac{k-1}{2}\text{Ma}_{0\text{n}}^2\right)}{\left(1 + \dfrac{k-1}{2}\text{Ma}_{0'\text{n}}^2\right)} \cong 262{,}0\,\text{K}$$

La velocità tangenziale resta invariata; ma la temperatura a valle della prima onda d'urto è cambiata, pertanto si deve ricalcolare il numero di Mach tangenziale:

$$\mathrm{Ma}_{0'\mathrm{t}} = \mathrm{Ma}_{0\mathrm{t}}\sqrt{\frac{T_0}{T_{0'}}} \cong 1{,}179$$

Col noto teorema di Pitagora si giunge infine al valore complessivo del numero di Mach dopo l'onda obliqua:

$$\mathrm{Ma}_{0'} = \sqrt{\mathrm{Ma}_{0'\mathrm{t}}^2 + \mathrm{Ma}_{0'\mathrm{n}}^2} \cong 1{,}425$$

Angolo di deflessione

$$\delta = \arctan\left(\frac{\mathrm{Ma}_{0'\mathrm{t}}}{\mathrm{Ma}_{0'\mathrm{n}}}\right) - 45° \cong 10{,}8°$$

Tale angolo rappresenta l'angolo di semiapertura del cono.

Condizioni a valle dell'onda d'urto normale

Dopo la prima onda d'urto obliqua il flusso incontra, prima di entrare nel diffusore vero e proprio, un'onda d'urto normale che tramuta il flusso in subsonico. Il calcolo delle condizioni a valle dell'onda (denotate dall'indice 1) è effettuabile con le note formule:

$$\mathrm{Ma}_1 = \sqrt{\frac{\mathrm{Ma}_{0'}^2 + \dfrac{2}{k-1}}{\dfrac{2k}{k-1}\mathrm{Ma}_{0'}^2 - 1}} \cong 0{,}729$$

$$p_1 = \left(\frac{2k}{k+1}\mathrm{Ma}_{0'}^2 - \frac{k-1}{k+1}\right)p_{0'} \cong 0{,}980\ \mathrm{bar}$$

Si noti che la pressione statica aumenta, ma quella totale diminuisce (l'onda d'urto è in processo non isoentropico); la temperatura totale invece rimarrà invariata dato che il fenomeno è considerato adiabatico.

$$T_{0'}^* = T_1^* \Rightarrow T_1 = T_{0'}\frac{\left(1 + \dfrac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_{0'}^2\right)}{\left(1 + \dfrac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)} \cong 333{,}0\ \mathrm{K}$$

Il dimensionamento ora prosegue con il procedimento usato per le prese subsoniche.

Sezione di ingresso

$$A_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1 v_1} = \frac{T_1 R^* \dot{m}}{p_1 \mathrm{Ma}_1 \sqrt{kR^* T_1}} \cong 0{,}146\ \mathrm{m}^2$$

Sezione di uscita

La temperatura totale si conserva nella presa dinamica:

$$T_2^* = T_1^* \Rightarrow T_2\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2\right) = T_1\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1\frac{\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)}{\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2\right)} \cong 350{,}9\ \mathrm{K}$$

E' necessario calcolare anche p_2:

$$p_2^* = \varepsilon_{PD}\, p_1^* \Rightarrow p_2\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = \varepsilon_{PD}\, p_1\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_2 = \varepsilon_{PD}\, p_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \cong 1{,}083\ \mathrm{bar}$$

E dunque:

$$A_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 v_2} = \frac{T_2 R^* \dot{m}}{p_2 \mathrm{Ma}_2\sqrt{kR^* T_2}} \cong 0{,}198\ \mathrm{m}^2$$

Lunghezza

Per stimare una lunghezza di riferimento, si può considerare che da osservazioni sperimentali si ha una buona presa dinamica con parete ad angolo di divergenza di semiapertura pari a 5°. Da cui (considerando le sezioni circolari):

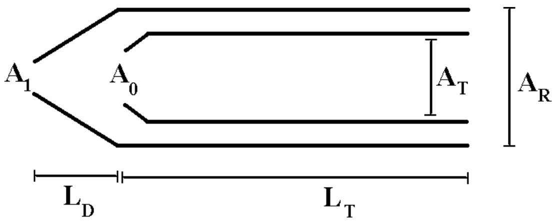
$$L = \frac{R_2 - R_1}{\tan 5°} = \frac{\sqrt{\frac{A_2}{\pi}} - \sqrt{\frac{A_1}{\pi}}}{\tan 5°} \cong 0{,}405\ \mathrm{m}$$

Rendimento complessivo della presa dinamica

$$\varepsilon_{PD}^* = \frac{p_2^*}{p_0^*} = \frac{p_2}{p_0}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2}{1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_0^2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \cong 0{,}85$$

ESERCIZIO 11

Si esegua il dimensionamento di massima di una camera di combustione tubolare.



Dati:

Portata di aria in ingresso: $\dot{m}_a = 12000$ kg/h
Portata di carburante in ingresso: $\dot{m}_f = 300$ kg/h
Numero di Mach all'ingresso: $\mathrm{Ma}_1 = 0{,}5$
Pressione all'ingresso: $p_1 = 15$ bar
Temperatura all'ingresso: $T_1 = 700$ K
Intensità di combustione: $I = 5 \cdot 10^7 \ \dfrac{\text{Kcal}}{\text{bar h m}^3}$

SOLUZIONE

Il dimensionamento viene fatto essenzialmente tramite l'equazione di continuità.

Sezione di ingresso al combustore
Tramite il numero di Mach si calcola immediatamente la velocità di ingresso:
$v_1 = \mathrm{Ma}_1 \sqrt{kR^* T_1} \cong 265{,}2 \text{ m/s}$
da cui è calcolabile l'area di ingresso:
$$A_1 = \frac{\dot{m}_a}{\rho_1 v_1} = \frac{\dot{m}_a R T_1}{p_1 v_1} \cong 1{,}68 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 16{,}8 \text{ cm}^2$$

Diffusore
Prima di entrare (parzialmente) nel tubo di fiamma, il flusso viene ulteriormente rallentato onde permettere una buona stabilità della fiamma. Una velocità di uscita indicativamente buona è sui 20 m/s; si procede dunque al dimensionamento del diffusore come per una qualunque presa dinamica. A questo scopo s'ipotizza il diffusore isoentropico (ipotesi non troppo errata) e adiabatico, e il numero di Mach di uscita pari a 0:
$$p_2 \cong p_2^* = p_1^* = p_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} \mathrm{Ma}_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \cong 17{,}8 \text{ bar}$$
$$T_2 \cong T_2^* = T_1^* = T_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} \mathrm{Ma}_1^2\right) \cong 735 \text{ K}$$
$$\rho_2 = \frac{p_2}{R^* T_2} \cong 8{,}44 \text{ kg/m}^3$$

D’ora in poi, date le basse velocità, il flusso sarà considerato incomprimibile, con il valore di densità costante pari a quello appena calcolato.

$$A_R = \frac{\dot{m}_a}{\rho_2 \, 20\,\text{m/s}} \cong 1{,}975 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2 = 197{,}5\,\text{cm}^2$$

Per il calcolo della lunghezza, si può dire che l’angolo di divergenza minimo sia di 20° (per divergenti dei combustori); quindi, stimando le sezioni come circolari:

$$L_D = \frac{R_R - R_1}{\tan 20°} = \frac{\sqrt{\frac{A_R}{\pi}} - \sqrt{\frac{A_1}{\pi}}}{\tan 20°} \cong 15{,}4\,\text{cm}$$

Ingresso alla zona primaria
Si può stimare che circa ¼ dell’aria entri nella zona primaria di combustione, e il resto circoli nella zona anulare che si trova al di fuori. Pertanto è ottenibile da queste semplici considerazioni l’area di ingresso del tubo di fiamma:

$$A_o = \frac{1}{4} A_R \cong 49{,}4\,\text{cm}^2$$

Il rapporto fra aria e combustibile così calcolato è:

$$\frac{\frac{1}{4}\dot{m}_a}{\dot{m}_f} = 10$$

che è vicino al rapporto stechiometrico.

Tubo di fiamma
Per il dimensionamento del tubo di fiamma si può considerare che nella sezione anulare il flusso vada a circa 40 m/s; da questo si calcola l’area della sezione anulare:

$$A_A = \frac{\frac{3}{4}\dot{m}_a}{\rho_2 \, 40\,\text{m/s}} \cong 74{,}1\,\text{cm}^2$$

da cui per sottrazione si ottiene la sezione del tubo di fiamma:

$$A_T = A_R - A_T \cong 123{,}4\,\text{cm}^2$$

La lunghezza del tubo di fiamma è ricavabile dall’intensità di combustione:

$$L = \frac{\dot{m}_f H_f}{A_T I p_2} \cong 28{,}7\,\text{cm}$$

ESERCIZIO 12

In un condotto privo di attrito a sezione costante entra un flusso di aria a $\mathrm{Ma}_1 = 0{,}5$. Calcolare la quantità di calore necessaria per portare il fluido a $\mathrm{Ma}_2 = 0{,}9$ se il fluido entra nel condotto con una temperatura iniziale T_1 pari a 400 K.

SOLUZIONE

La soluzione del quesito richiede l'elaborazione delle formule della conservazione di massa, energia e quantità di moto, nel caso isoentropico.

Massa:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \Rightarrow \rho_1 \mathrm{Ma}_1 \sqrt{T_1} = \rho_2 \mathrm{Ma}_2 \sqrt{T_2}$$

Quantità di moto:

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2 \Rightarrow \rho_1 R^* T_1 \left(k\mathrm{Ma}_1^2 + 1\right) = \rho_2 R^* T_2 \left(k\mathrm{Ma}_2^2 + 1\right)$$

Energia:

$$\dot{m} h_2^* = \dot{m} h_1^* + \dot{Q}^{\leftarrow} \Rightarrow c_p T_2^* = c_p T_1^* + \frac{\dot{Q}^{\leftarrow}}{\dot{m}}$$

Dalla prima:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\mathrm{Ma}_2 \sqrt{T_2}}{\mathrm{Ma}_1 \sqrt{T_1}}$$

dalla seconda:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2 \left(k\mathrm{Ma}_2^2 + 1\right)}{T_1 \left(k\mathrm{Ma}_1^2 + 1\right)}$$

uguagliando:

$$\frac{\mathrm{Ma}_2 \sqrt{T_2}}{\mathrm{Ma}_1 \sqrt{T_1}} = \frac{T_2 \left(k\mathrm{Ma}_2^2 + 1\right)}{T_1 \left(k\mathrm{Ma}_1^2 + 1\right)} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\mathrm{Ma}_2^2}{\mathrm{Ma}_1^2} \left(\frac{k\mathrm{Ma}_1^2 + 1}{k\mathrm{Ma}_2^2 + 1}\right)^2$$

Per cui:

$$\frac{T_2^*}{T_1^*} = \frac{\mathrm{Ma}_2^2}{\mathrm{Ma}_1^2} \left(\frac{k\mathrm{Ma}_1^2 + 1}{k\mathrm{Ma}_2^2 + 1}\right)^2 \frac{1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2}{1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2} \cong 1{,}8753$$

e infine dall'equazione dell'energia:

$$\frac{\dot{Q}^{\leftarrow}}{\dot{m}} = c_p \left(T_2^* - T_1^*\right) = c_p T_1 \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)\left(\frac{T_2^*}{T_1^*} - 1\right) \cong 361{,}3 \text{ J/kg}$$

ESERCIZIO 13

Un ugello semplicemente convergente, a punto fisso, ha una portata d'aria $\dot{m} = 15\,\text{kg/s}$ e una temperatura di ingresso del fluido $T_1 = 850$ K. La velocità del flusso di aria all'uscita della turbina è $v_1 = 100$ m/s.
Si calcoli la pressione alla sezione di uscita p_2 sapendo che la spinta è di 900 kgp e supponendo l'ugello isoentropico.

SOLUZIONE

Come prima cosa conviene calcolare il valore della temperatura totale all'imbocco dell'ugello, cosa che tornerà utile in seguito:

$$T_1^* = T_1 + \frac{v_1^2}{2c_p} \cong 855{,}0\,\text{K}$$

E' necessario sapere se l'ugello sia saturato o meno. Si ipotizza inizialmente che non lo sia; se l'ugello non è saturo dovrà essere:

$$\frac{p_1^*}{p_0} < \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \cong 1{,}89$$

$$\frac{T_1^*}{T_2} < \left(1 + \frac{k-1}{2}\right) \cong 1{,}2$$

e pertanto:

$$T_2 > \frac{1}{1{,}2} T_1^* \cong 0{,}833\, T_1^*$$

La spinta (in condizioni di adattamento) è data da:

$$T = \dot{m}(v_2 - v_0) = \dot{m}v_2 = \dot{m}\sqrt{2c_p\left(T_1^* - T_2\right)} = \dot{m}\sqrt{2T_1^* c_p\left(1 - \frac{T_2}{T_1^*}\right)} < \dot{m}\sqrt{2T_1^* c_p(1 - 0{,}833)} \cong 819{,}6\,\text{kgp}$$

La massima spinta ottenibile con un ugello adattato è inferiore a quella fornita come dato del problema: pertanto l'ugello non è adattato.

Se l'ugello non è adattato, si avrà la condizione di Ma = 1 all'uscita, e pertanto varrà:

$$\frac{p_1^*}{p_2} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \cong 1{,}89$$

$$\frac{T_1^*}{T_2} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\right) \cong 1{,}2 \Rightarrow T_2 \cong 712{,}5\,\text{K}$$

La spinta ora è data dalla formula:

$$T = \dot{m}v_2 + \left(p_2 - p_0\right)A_2$$

E' immediato calcolare la velocità di uscita:

$$v_2 = \sqrt{2T_1^* c_p(1 - 0{,}833)} \cong 535{,}5\,\text{m/s}$$

Dall'equazione di continuità si ricava il valore dell'area di uscita:

$$A_2 = \frac{\dot{m}}{v_2 \rho_2} = \frac{\dot{m} R^* T_2}{v_2 p_2}$$

Per cui:

$$T = \dot{m} v_2 + \left(p_2 - p_0\right) \frac{\dot{m} R^* T_2}{v_2 p_2} = \dot{m} v_2 + \left(1 - \frac{p_0}{p_2}\right) \frac{\dot{m} R^* T_2}{v_2} \Rightarrow$$

$$p_2 = \frac{p_0}{1 - T \dfrac{v_2}{\dot{m} R^* T_2} + \dfrac{v_2^2}{R^* T_2}} \cong 1{,}16 \text{ bar}$$

ESERCIZIO 14

Calcolare le caratteristiche statiche del flusso nella gola e a valle di un ugello convergente divergente saturato (Ma =1 in gola). Si supponga tale ugello isoentropico.

Dati:

Pressione totale all'ingresso: $p_1^* = 0{,}7\ \text{bar}$
Temperatura totale all'ingresso: $T_1^* = 900\ \text{K}$
Rapporto costruttivo: $\dfrac{A_2}{A_{gola}} = 1{,}2$
Pressione esterna: $p_0 = 0{,}26\ \text{bar}$

SOLUZIONE

Il calcolo delle condizioni alla sezione di gola è banale, e si ottiene tramite la conservazione di pressione e temperatura totale:

$$p_{gola} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} p_1^* \cong 0{,}37\ \text{bar}$$

$$T_{gola} = \left(\frac{2}{k+1}\right) T_1^* \cong 750\ \text{K}$$

Per trovare invece le condizioni a valle del divergente, la procedura è un po' più complessa. Nel caso di ugello isoentropico vale:

$$\frac{A_2}{A_{gola}} = \frac{1}{\text{Ma}_2}\left(\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}\text{Ma}_2^2\right)\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

Da tale formula è possibile ricavare il numero di Mach all'uscita dell'ugello. Le soluzioni di tale equazione sono due, una subsonica (che non è quella cercata ora) e una supersonica. Per trovare tale soluzione supersonica si può usare un metodo numerico del tipo:

$$\text{Ma}_2(n) = \sqrt{\frac{2}{k-1}\left(\frac{(k+1)}{2}\left(\frac{A_2}{A_{gola}}\text{Ma}_2(n-1)\right)^{\frac{2(k-1)}{k+1}} - 1\right)}$$

Ponendo come punto di partenza un $\text{Ma}_2(0) = 2$, si ha:

$$\text{Ma}_2(1) = \sqrt{\frac{2}{k-1}\left(\frac{(k+1)}{2}\left(\frac{A_2}{A_{gola}}2\right)^{\frac{2(k-1)}{k+1}} - 1\right)} \cong 1{,}960$$

$$\text{Ma}_2(2) \cong 1{,}945$$
$$\text{Ma}_2(3) \cong 1{,}939$$
$$\text{Ma}_2(4) \cong 1{,}936$$
$$\text{Ma}_2(5) \cong 1{,}935$$

$\text{Ma}_2(6) \cong 1{,}935$

Il metodo sembra essere arrivato a convergenza dopo sei iterazioni. Pertanto si può affermare che all'uscita dell'ugello:

$\text{Ma}_2 \cong 1{,}93$

Dalla conservazione di temperatura e pressione totali si ha:

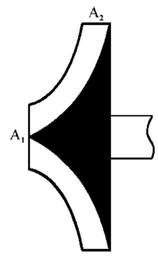
$$T_2 = \frac{T_1^*}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_2^2\right)} \cong 515{,}8\ \text{K}$$

$$p_2 = \frac{p_1^*}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} \cong 0{,}10\ \text{bar}$$

Considerando che la pressione esterna è 0,26 bar, l'ugello è dunque sovraespanso. Inoltre, essendo la pressione di uscita molto minore di quella esterna, è probabile la formazione di onde d'urto e la separazione del getto.

ESERCIZIO 15

Eseguire il dimensionamento di massima di un compressore centrifugo a pale radiali. La girante del compressore è montata a sbalzo, e per il calcolo dello scambio energetico si prenda come riferimento la velocità di trascinamento al bordo esterno della sezione di ingresso.



Dati:

Rapporto di compressione: $\beta = 3{,}5$
Portata di aria in ingresso: $\dot{m} = 25\,\text{kg/s}$
Pressione all'ingresso: $p_1 = 5\,\text{bar}$
Temperatura all'ingresso: $T_1 = 500\,\text{K}$
Rendimento adiabatico: $\eta = 0{,}85$
Velocità all'ingresso (solo assiale): $v_1 = 100\,\text{m/s}$
Numero di giri: $n = 12000\,\text{giri/min}$
Grado di reazione: $R = 0{,}5$

SOLUZIONE

Sezione di ingresso
Si risolve al solito con l'equazione di continuità:

$$A_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1 v_1} = \frac{R^* T_1 \dot{m}}{p_1 v_1} \cong 0{,}0718\,\text{m}^2$$

per cui:

$$R_1 = \sqrt{\frac{A_1}{\pi}} \cong 0{,}15\,\text{m}$$

Triangolo di velocità all'ingresso
Per prima cosa si calcola la velocità angolare della girante:

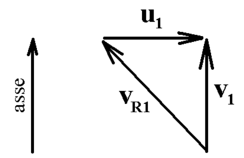
$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \cong 1256{,}6\,\text{rad/s}$$

e quindi la velocità di trascinamento (in corrispondenza del raggio esterno):

$$u_1 = R_1 \omega \cong 188{,}5\,\text{m/s}$$

La legge di composizione delle velocità afferma:

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{v}_{R1}$$



Dal teorema di Pitagora:

$$v_{R1} = \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \cong 213{,}4\ \text{m/s}$$

Potenza

Conviene calcolare la temperatura totale all'ingresso, che tornerà utile più avanti:

$$T_1^* = T_1 + \frac{v_1^2}{2c} \cong 505\ \text{K}$$

La potenza del compressore deve essere regolata per ottenere il rapporto di compressione desiderato. Nel caso ideale (trasformazione isoentropica) si avrebbe:

$$H = \frac{\dot{L}}{\dot{m}} = c_p\left(T_2^* - T_1^*\right) = c_p T_1^*\left(\frac{T_2^*}{T_1^*} - 1\right) = c_p T_1^*\left(\beta^{\frac{k-1}{k}} - 1\right)$$

mentre nel caso reale entra in gioco il rendimento adiabatico:

$$H = \frac{c_p T_1^*}{\eta}\left(\beta^{\frac{k-1}{k}} - 1\right) \cong 256{,}7\ \text{kW/kg}$$

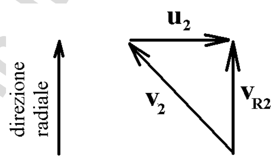
Triangolo di velocità all'uscita

Dalla formula di Eulero si ha:

$$H = u_2 v_{t2} - u_1 v_{1t}$$

dato che all'ingresso non c'è componente tangenziale della velocità assoluta, la formula si semplifica e diventa:

$$H = u_2 v_{t2}$$



inoltre, data la palettatura radiale si ha che:

$$v_{t2} = u_2$$

e quindi:

$$H = u_2^2$$

da cui si ricava:

$$u_2 = \sqrt{H} \cong 506{,}7\ \text{m/s}$$

Grado di reazione

Dalla definizione:

$$R = \frac{\text{energia scambiata per variazione di pressione e temperatura}}{\text{energia scambiata totale}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{\frac{1}{2}\left(v_{R1}^2 - v_{R2}^2 + \left(u_2^2 - u_1^2\right)\right)}{H} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{R2} = \sqrt{-2RH + v_{R1}^2 + u_2^2 - u_1^2} \cong 100{,}3\ \text{m/s}$$

e tramite Pitagora:

$$v_2 = \sqrt{v_{R2}^2 + u_2^2} \cong 516{,}5\ \text{m/s}$$

Sezione di uscita

Il raggio esterno del compressore si calcola dalla velocità di trascinamento all'uscita:

$$R_2 = \frac{u_2}{\omega_2} \cong 0{,}40\ \text{m}$$

Per la sezione di uscita si applica ancora la continuità; ma è necessario conoscere i parametri statici del fluido all'uscita.

$$T_2 = T_2^* - \frac{v_2^2}{2c_p} = T_1^* + \frac{1}{c_p}\frac{\dot{L}}{\dot{m}} - \frac{v_2^2}{2c_p} \cong 627{,}6\ \text{K}$$

$$\text{Ma}_2 = \frac{v_2}{\sqrt{kR^* T_2}} \cong 1{,}029$$

$$p_2 = \frac{p_2^*}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} = \frac{\beta p_1^*}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}$$

si può fare a meno di calcolare la pressione totale all'ingresso perché data la bassa velocità essa sarà molto prossima alla presione statica:

$$p_2 \cong \frac{\beta p_1}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} \cong 8{,}93\ \text{bar}$$

Ora si hanno tutti i dati per calcolare la sezione di uscita:

$$A_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 v_{radiale2}} = \frac{R^* T_2 \dot{m}}{p_2 v_{R2}} \cong 0{,}050\ \text{m}^2$$

da cui è possibile calcolare l'altezza delle pale (la sezione di uscita è la superficie laterale di un cilindro):

$$h_2 = \frac{A_2}{2\pi R_2} \cong 0{,}020\ \text{m}$$

ESERCIZIO 16

Eseguire il dimensionamento di massima di uno stadio di turbina assiale. Si consideri la velocità assoluta di scarico come assiale.

Dati:

Potenza per unità di massa: $H = 25\,\text{kcal/kg}$
Portata di aria in ingresso: $\dot{m} = 40\,\text{kg/s}$
Pressione totale all'ingresso: $p_1^* = 6\,\text{bar}$
Temperatura totale all'ingresso: $T_1^* = 800\,\text{K}$
Rendimento adiabatico: $\eta = 0{,}9$
Numero di Mach all'ingresso: $\text{Ma}_1 = 1$
Velocità periferica della girante: $u_1 = u_2 = u = 400\,\text{m/s}$
Grado di reazione: $R = 0{,}6$

SOLUZIONE

Triangolo di velocità all'ingresso
Per prima cosa conviene calcolare i valori statici di pressione e temperatura:

$$T_1 = \frac{T_1^*}{1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_1^2} \cong 666{,}67\,\text{K}$$

$$p_1 = \frac{p_1^*}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} \cong 3{,}12\,\text{bar}$$

Dal numero di Mach si ottiene la velocità assoluta all'ingresso:

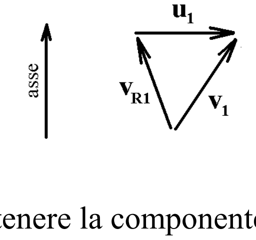
$$v_1 = \text{Ma}_1\sqrt{kR^*T_1} \cong 517{,}56\,\text{m/s}$$

Dalla formula di Eulero per lo scambio energetico si ricava il valore della velocità tangenziale assoluta (si ricordi che allo scarico la velocità è assiale e quindi non ha componente tangenziale:

$$H = v_{t1}u - v_{t2}u = v_{t1}u \Rightarrow v_{t1} = \frac{H}{u} \cong 261{,}69\,\text{m/s}$$

La legge di composizione delle velocità afferma:

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{v}_{R1}$$



Dal teorema di Pitagora è possibile ottenere la componente assiale della velocità:

$$v_{a1} = \sqrt{v_1^2 - v_{t1}^2} \cong 446{,}53\,\text{m/s}$$

e con una sottrazione si ha la componente tangenziale della velocità relativa:

$v_{Rt1} = v_{t1} - u \cong -138{,}31\,\text{m/s}$

Sezione di ingresso (alla parte rotante)
Si risolve al solito con l'equazione di continuità:

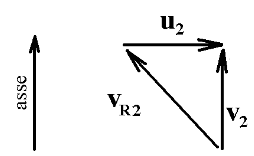
$$A_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1 v_{a1}} = \frac{R^* T_1 \dot{m}}{p_1 v_{a1}} \cong 0{,}0541\,\text{m}^2$$

Grado di reazione:

$$R = \frac{\frac{1}{2}\left(v_{R1}^2 - v_{R2}^2 + \left(u_2^2 - u_1^2\right)\right)}{H} = \frac{\frac{1}{2}\left(v_{R1}^2 - v_{R2}^2\right)}{H} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{R2} = \sqrt{-2RH + v_{R1}^2} \cong 586{,}62\,\text{m/s}$$

Triangolo di velocità all'uscita:
La turbina è costruita in modo da dare velocità di scarico assiale, per cui il triangolo delle velocità di uscita sarà:



Dal teorema di Pitagora è possibile ottenere la velocità assoluta:

$$v_2 = v_{a2} = \sqrt{v_{r2}^2 - u^2} \cong 429{,}10\,\text{m/s}$$

e con una sottrazione si ha la componente tangenziale della velocità relativa:

$$v_{Rt1} = v_{t1} - u \cong -138{,}31\,\text{m/s}$$

Sezione di uscita
Si risolve sempre con l'equazione di continuità:

$$A_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 v_{a2}}$$

ma per trovare il valore della densità occorre conoscere le grandezze termodinamiche statiche all'uscita.
Da un bilancio di energia (ipotizzando la turbina adiabatica):

$$T_2^* = T_1^* - \frac{H}{c_p} \cong 695{,}67\,\text{K}$$

$$T_2 = T_2^* - \frac{v_2^2}{2c_p} \cong 604{,}00\,\text{K}$$

E trovata la temperatura si può trovare anche il numero di Mach:

$$\text{Ma}_2 = \frac{v_2}{\sqrt{kR^* T_2}} \cong 0{,}87$$

Per il calcolo della pressione interviene il rendimento:

$$\eta = \frac{L^{\rightarrow}_{reale}}{L^{\rightarrow}_{ideale}} = \frac{T_1^* - T_2^*}{T_2^* - T_{2'}^*} \Rightarrow T_{2'}^* = T_1^* + \frac{T_2^* - T_1^*}{\eta} \cong 684{,}08\,\mathrm{K}$$

da cui:

$$p_2^* = p_1^* \left(\frac{T_{2'}^*}{T_1^*} \right)^{\frac{k}{k-1}} \cong 3{,}47\,\mathrm{bar}$$

$$p_2 = \frac{p_2^*}{\left(1 + \frac{k-1}{2} \mathrm{Ma}_2^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}} \cong 2{,}12\,\mathrm{bar}$$

A questo punto è possibile inserire tutti i dati nella formula della sezione. Si ha quindi:

$$A_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 v_{a2}} = \frac{R^* T_2 \dot{m}}{p_2 v_{a2}} \cong 0{,}0762\,\mathrm{m}^2$$

ESERCIZIO 17

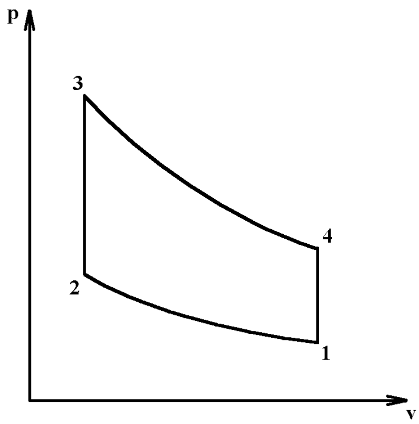
Si calcolino i punti significativi del ciclo ideale e le prestazioni di un motore a combustione interna (ciclo Otto) funzionante a quota 0.

Dati:

Cilindrata: $V = 10000\,\text{cm}^3$
Pressione esterna: $p_0 = 1\,\text{bar}$
Temperatura esterna: $T_0 = 300\,\text{K}$
Numero di giri al minuto: $n = 3000\,\text{giri/min}$
Rapporto di compressione volumetrico: $r = 8$
Potere calorifico inferiore del combustibile: $H_i = 10000$ kcal/kg
Rapporto aria/combustibile: $\alpha = 15$

SOLUZIONE

Ciclo termodinamico



Al punto 1 si avranno le condizioni dell'aria esterna, per cui:

$$v_1 = \frac{R^* T_1}{p_1} \cong 0{,}861\,\text{m}^3/\text{kg}$$

e inoltre sarà che:

$$v_2 = \frac{v_1}{r} \cong 0{,}108\,\text{m}^3/\text{kg}$$

Il calore introdotto per unità di massa sarà:

$$Q^{\leftarrow} = \frac{H_i}{1+\alpha} \cong 2617\,\text{kJ/kg}$$

Dalla teoria è noto il rendimento termodinamico del ciclo ideale:

$$\eta_T = 1 - r^{1-k} \cong 0{,}565$$

per cui è immediato il calcolo del lavoro prodotto per unità di massa:

$$L^{\rightarrow}_{IDEALE} = Q^{\leftarrow} \eta_T \cong 1479\,\text{kJ/kg}$$

Potenza

La potenza infine è data dalla formula:

$$P_{IDEALE}^{\rightarrow} = \eta_T \rho_1 V \frac{H_i}{1+\alpha}\frac{n}{120} = \eta_T \frac{V}{v_1}\frac{H_i}{1+\alpha}\frac{n}{120} \cong 429{,}5\,\mathrm{kW}$$

ESERCIZIO 18

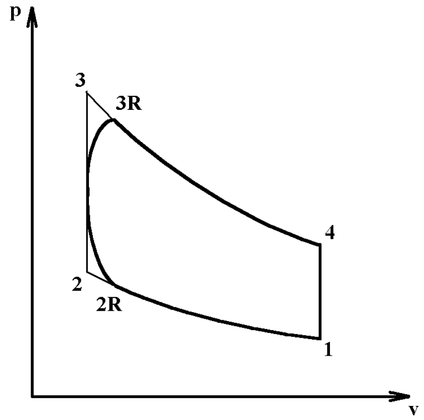
In riferimento al motore dell'esercizio precedente, si calcolino i punti significativi del ciclo con combustione reale.

Dati ulteriori:

Frazione di corsa dell'anticipo: $x = 0,2$ (combustione a cavallo del punto morto superiore)
Rendimento organico: $\eta_O = 0,85$
Rendimento volumetrico: $\lambda_V = 0,8$

SOLUZIONE

Ciclo termodinamico



Per trovare il punto 2R occorre porre:

$$x = \frac{v_{2R} - v_2}{v_1 - v_2} \Rightarrow v_{2R} = v_2 + x(v_1 - v_2) \cong 0,259 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Dato che la trasformazione fra 1 e 2 è un'isoentropica:

$$T_{2R} = T_1 \left(\frac{v_{2R}}{v_1} \right)^{1-k} \cong 425,7 \text{ K}$$

$$p_{2R} = p_1 \left(\frac{T_{2R}}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \cong 3,40 \text{ bar}$$

Per il calcolo del punto 3R si deve impostare un bilancio di energia, tenendo conto che nel processo di combustione reale si hanno perdite (stimabili come il 30% del calore introdotto) dovute alla refrigerazione e che nella combustione stessa si produce lavoro.
Il lavoro prodotto sarebbe:

$$L^{\rightarrow}_{2R-3R} = \int_{2R}^{3R} p dv$$

La curva si approssima con un tratto di parabola, la cui area sottesa è per il noto teorema di Archimede pari a 2/3 del rettangolo che lo circoscrive:

$$L^{\rightarrow}_{2R-3R} = \frac{2}{3}(v_{2R} - v_2)(p_{3R} - p_{2R}) = \frac{2}{3}(v_{2R} - v_2)\left(\frac{R^* T_{3R}}{v_{3R}} - p_{2R}\right)$$

Il bilancio di energia è dunque:

$$\Delta U = c_v(T_{3R} - T_{2R}) = Q^{\leftarrow} - 0{,}3Q^{\leftarrow} - L^{\rightarrow}_{2R-3R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_v(T_{3R} - T_{2R}) = 0{,}7\frac{H_i}{1+\alpha} - \frac{2}{3}(v_{2R} - v_2)\left(\frac{R^* T_{3R}}{v_{3R}} - p_{2R}\right)$$

da cui è possibile ricavare la temperatura:

$$T_{3R} = \frac{0{,}7\dfrac{H_i}{1+\alpha} + \dfrac{2}{3}(v_{2R} - v_2)p_{2R} + c_v T_{2R}}{\left(c_v + \dfrac{2}{3}(v_{2R} - v_2)\dfrac{R^*}{v_{3R}}\right)} \cong 2619\,\mathrm{K}$$

Il punto 4 è calcolabile ancora con le equazioni dell'isoentropica:

$$T_4 = T_{3R}\left(\frac{v_4}{v_{3R}}\right)^{1-k} \cong 1620\,\mathrm{K}$$

Rendimento reale

Il lavoro del ciclo è dato dal bilancio dei calori introdotti:

$$L^{\rightarrow}_{REALE} = 0{,}7Q^{\leftarrow}_{Comb} - Q^{\rightarrow}_{4-1} = 0{,}7\frac{H_i}{1+\alpha} - c_v(T_4 - T_1) \cong 885{,}4\,\mathrm{kJ/kg}$$

Per cui:

$$\eta_R = \frac{L^{\rightarrow}_{REALE}}{L^{\rightarrow}_{IDEALE}} \cong 0{,}599$$

Potenza reale

E' data dalla formula:

$$P^{\rightarrow}_{REALE} = \eta_T \eta_O \eta_R \lambda_v \rho_1 V \frac{H_i}{1+\alpha}\frac{n}{120} \cong 175{,}0\,\mathrm{kW}$$

ESERCIZIO 19

In riferimento al motore dell'esercizio precedente, si valuti il funzionamento dello stesso a 5000 m di quota.
Si immagini quindi di ristabilire il motore a quota 0 con un compressore comandato meccanicamente; calcolare i parametri fondamentali del nuovo ciclo ricordando di includere nel conteggio della potenza complessiva del motore il lavoro di pompaggio e quello di compressione.

SOLUZIONE

Caratteristiche dell'aria
Dalle formule dell'aria tipo si avrà:

$$T_z = 288{,}16 - 6{,}5 z_{km}\ \mathrm{K} \cong 255{,}7\ \mathrm{K}$$

$$p_z = 1{,}013\left(1 - \frac{z_{km}}{44{,}3}\right)^{5{,}25} \mathrm{bar} \cong 0{,}540\ \mathrm{bar}$$

Funzionamento in quota
Si può valutare la perdita di potenza con una formula empirica. Una delle più comuni è la seguente:

$$\frac{P_z}{P_0} = \frac{p_z}{p_0}\frac{T_0 + 256}{T_z + 256}$$

per cui:

$$P_z = P_0 \frac{p_z}{p_0}\frac{T_0 + 256}{T_z + 256} \cong 99{,}7\ \mathrm{kW}$$

Compressore
Il compressore deve riportare la pressione al valore di 1 bar. Il flusso di aria sul quale dovrà lavorare sarà:

$$\dot{m} = \frac{\rho_0 V n}{120} \cong 0{,}290\ \mathrm{kg/s}$$

supponendo il compressore isoentropico, si può calcolare la temperatura di uscita dell'aria:

$$T_{out} = T_z \left(\frac{p_0}{p_z}\right)^{\frac{k-1}{k}} \cong 304{,}9\ \mathrm{K}$$

per cui la potenza del compressore (che andrà sottratta dalla potenza disponibile al motore) sarà:

$$P_C = \dot{m} c_p \left(T_{out} - T_z\right) \cong 14{,}3\ \mathrm{kW}$$

Lavoro di pompaggio
Il lavoro di pompaggio questa volta è positivo, ed è anche consistente! Infatti la pressione di aspirazione è maggiore della pressione di scarico. Tale lavoro si può stimare come l'area di un rettangolo:

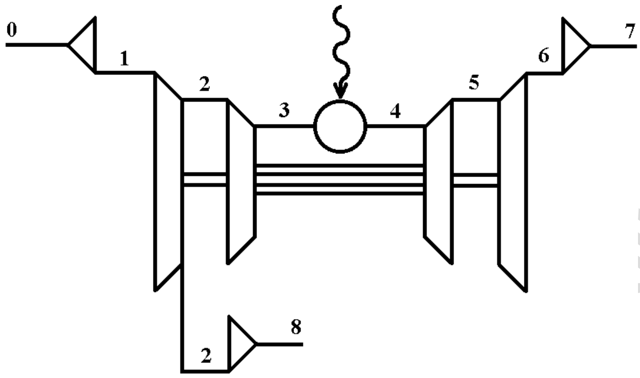
$$L_P = \left(p_0 - p_z\right)\left(v_1 - v_2\right) \cong 33{,}1\ \mathrm{kW/kg}$$

Potenza complessiva
Si ricava dalla formula:

$$P_{REALE}^{\rightarrow} = P_0 + \eta_O \lambda_v \rho_1 V \frac{n}{120}\left(L_p\right) - P_c \cong 163{,}0\,\mathrm{kW}$$

ESERCIZIO 20

Il CFM56-7B26 è un motore turbofan ad alto rapporto di diluizione, a flussi separati. Si provi a calcolarne le prestazioni a punto fisso dai dati assegnati.



Le caratteristiche del propulsore sono poste come:
Flusso di aria: $\dot{m}_a = 354\,\text{kg/s}$

Rapporti di compressione: $\beta_1 = \frac{p_2^*}{p_1^*} = 1{,}75$; $\beta_2 = \frac{p_3^*}{p_2^*} = 18{,}75$

Temperatura massima di ingresso in turbina: $T_4^* = 1450\,\text{K}$

Potere calorifico del carburante: $H_f = 43953\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$

Rendimento isoentropico del fan e del compressore: $\eta_C = 0{,}92$

Rendimento isoentropico delle turbine: $\eta_{TB} = 0{,}96$

Rendimento dell'ugello: $\eta_U = 0{,}99$

Rrapporto di bypass: BPR = 5,3

SOLUZIONE

Si studia il funzionamento del motore a livello del mare, in atmosfera standard, a 0 Mach; pertanto siano:
T_0 = 288 K
p_0 = 1 bar

Punto 0
Le caratteristiche sono quelle dell'aria all'esterno:
T_0 = 288 K
p_0 = 1 bar.
I valori delle grandezze totali coincidono con quelli statici, dato che il motore è a punto fisso.

Punto 1
Da 0 a 1 (passaggio nella presa dinamica) non avviene nulla: il motore è fermo.

Punto 2
Da 1 a 2 si ha il passaggio nel primo compressore (la "ventola" o *fan*). La pressione finale è data dal rapporto di compressione:

$$p_2^* = \beta_1 p_1^* \cong 1{,}75\ \text{bar}$$

La temperatura si ricava calcolando prima quella che si avrebbe nel caso isoentropico (3'):

$$\frac{T_{2'}^*}{T_1^*} = \left(\frac{p_{2'}^*}{p_1^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} \Rightarrow T_{2'}^* = T_1^* \beta_1^{\frac{k-1}{k}} \cong 337{,}9\ \text{K}$$

Dalla definizione di rendimento:

$$\eta_C = \frac{L_{ideale}^{\leftarrow}}{L_{reale}^{\leftarrow}} = \frac{\dot{m}_a\left(h_{2'}^* - h_1^*\right)}{\dot{m}_a\left(h_2^* - h_1^*\right)} = \frac{c_p\left(T_{2'}^* - T_1^*\right)}{c_p\left(T_2^* - T_1^*\right)} \Rightarrow T_2^* = T_1^* + \frac{T_{2'}^* - T_1^*}{\eta_C} \cong 342{,}3\ \text{K}$$

Uscita del primo flusso (punto 8)
Il motore è un turbofan a doppio flusso, con flussi separati; tramite il rapporto di bypass è possibile calcolare l'entità dei due flussi:

$$\dot{m}_1 = \frac{\text{BPR}}{\text{BPR}+1}\dot{m}_a \cong 297{,}8\ \text{kg/s}$$

$$\dot{m}_2 = \frac{1}{\text{BPR}+1}\dot{m}_a \cong 56{,}2\ \text{kg/s}$$

Il primo flusso esce dal motore tramite un ugello, attraverso una trasformazione isoentropica; dato che il rapporto di compressione non supera il valore di saturazione di 1,88, vorrà dire che l'ugello sarà adattato. Pertanto la pressione di uscita sarà:

$$p_8 = p_1$$

Da 2 a 8 (passaggio nell'ugello del primo flusso) non ci sono scambi di energia, pertanto la portata entalpica si conserva, e anche la temperatura totale, in condizioni di isoentropia:

$$T_{8'}^* = T_2^*$$

Dalla trasformazione isoentropica si ricava la temperatura dei gas di scarico: quella statica, non quella totale, perché servirà per il calcolo della velocità di efflusso:

$$\frac{T_{8'}}{T_2^*} = \left(\frac{p_{8'}}{p_2^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} \Rightarrow T_{8'} = T_2^*\left(\frac{p_{8'}}{p_2^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} \cong 291{,}7\ \text{K}$$

$$\eta_U = \frac{L_{reale}^{\rightarrow}}{L_{ideale}^{\rightarrow}} = \frac{T_2^* - T_8}{T_2^* - T_{8'}} \Rightarrow T_8 = T_2^* + \eta_U\left(T_{8'} - T_2^*\right) \cong 292{,}2\ \text{K}$$

Da un bilancio di energia su questo primo ugello si ricava la velocità di uscita del primo flusso:

$$c_p T_2^* = c_p T_8 + \frac{v_8^2}{2} \Rightarrow v_8 = \sqrt{2c_p\left(T_2^* - T_8\right)} \cong 317{,}1\ \text{m/s}$$

Si può verificare che tale valore è minore della velocità del suono alla temperatura del gas di scarico.

Punto 3
Da 2 a 3 si ha il passaggio nel secondo compressore. La pressione finale è data ancora dal rapporto di compressione:

$$p_3^* = \beta_2 p_2^* \cong 32{,}8\ \text{bar}$$

La temperatura si ricava calcolando prima quella che si avrebbe nel caso isoentropico (3'):

$$\frac{T_{3'}^*}{T_2^*} = \left(\frac{p_{3'}^*}{p_2^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} \Rightarrow T_{3'}^* = T_2^* \beta_2^{\frac{k-1}{k}} \cong 790{,}8\,\mathrm{K}$$

Dalla definizione di rendimento:

$$T_3^* = T_2^* + \frac{T_{3'}^* - T_2^*}{\eta_C} \cong 829{,}8\,\mathrm{K}$$

Punto 4

Da 3 a 4 si ha il passaggio nel combustore. Il rapporto stechiometrico fra la massa di combustibile e la massa di aria necessaria per bruciarla è attorno a 1:15; c'è sempre un eccesso di aria, altrimenti la temperatura in corrispondenza della prima turbina sarebbe eccessiva e rovinerebbe la palettatura della turbina stessa.

$p_4^* = p_3^* \cong 32\,\mathrm{bar}$

E' necessario calcolare la quantità di combustibile necessaria a raggiungere la temperatura voluta al punto 4 (1450 K). Si usa un bilancio di energia, le entrate sono il flusso entalpico dell'aria e il flusso di energia legato al potere calorifico del carburante, l'uscita è il flusso entalpico dei gas combusti:

$$\dot{m}_2 c_p T_3^* + \dot{m}_f H_f = (\dot{m}_2 + \dot{m}_f) c_p T_4^* \Rightarrow c_p T_3^* + \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_2} H_f = \left(1 + \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_2}\right) c_p T_4^*$$

dove $\dot{m}_f$ è il flusso di combustibile.

Si definisce:

$$f = \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_2}$$

per cui:

$$c_p T_3^* + f H_f = (1 + f) c_p T_4^* \Rightarrow f = \frac{c_p T_4^* - c_p T_3^*}{H_f - c_p T_4^*} \cong 0{,}0146$$

Punto 5

Il passaggio nel primo stadio di turbina da 4 a 5 deve fornire il lavoro necessario per mandare il compressore. Si dovrebbe tenere conto che il calore specifico non è costante al variare della temperatura, ma qui sarà supposto costante. Per questo bilancio si dovrebbe scrivere a rigore:

$$\dot{m}_2 c_p (T_3^* - T_2^*) = (\dot{m}_2 + \dot{m}_f) c_p (T_4^* - T_5^*)$$

per semplicità, dato che f è piccolo, si semplifica in:

$$\dot{m}_2 c_p (T_3^* - T_2^*) = \dot{m}_2 c_p (T_4^* - T_5^*) \Rightarrow T_5^* = T_4^* - T_3^* + T_2^* \cong 962{,}5\,\mathrm{K}$$

Per trovare la pressione, bisogna trovare la pressione al punto 5' (raggiunto tramite una isoentropica):

$$\eta_{TB} = \frac{L_{reale}^{\rightarrow}}{L_{ideale}^{\rightarrow}} = \frac{T_4^* - T_5^*}{T_4^* - T_{5'}^*} \Rightarrow T_{5'}^* = T_4^* + \frac{T_5^* - T_4^*}{\eta_{TB}} \cong 942{,}2\,\mathrm{K}$$

$$\frac{p_{5'}^*}{p_4^*} = \left(\frac{T_{5'}^*}{T_4^*}\right)^{\frac{k}{k-1}} \Rightarrow p_{5'}^* = p_4^* \left(\frac{T_{5'}^*}{T_4^*}\right)^{\frac{k}{k-1}} \cong 7{,}25\,\mathrm{bar}$$

Punto 6

Il passaggio nel secondo stadio di turbina da 5 a 6 deve fornire il lavoro necessario per il fan. Per questo bilancio si può scrivere:

$$(\dot{m}_1 + \dot{m}_2)c_p(T_2^* - T_1^*) = (\dot{m}_2 + \dot{m}_f)c_p(T_5^* - T_6^*)$$

ma ancora, dato che *f* è piccolo, si semplifica in:

$$(\dot{m}_1 + \dot{m}_2)c_p(T_2^* - T_1^*) = \dot{m}_2 c_p(T_5^* - T_6^*) \Rightarrow T_6^* = T_5^* - (T_2^* - T_1^*)(\mathrm{BPR} + 1) \cong 620{,}6\,\mathrm{K}$$

Per trovare la pressione, bisogna trovare la pressione al punto 6' (raggiunto tramite una isoentropica):

$$T_{6'}^* = T_5^* + \frac{T_6^* - T_5^*}{\eta_{TB}} \cong 606{,}3\,\mathrm{K}$$

$$\frac{p_{5'}^*}{p_4^*} = \left(\frac{T_{5'}^*}{T_4^*}\right)^{\frac{k}{k-1}} \Rightarrow p_{5'}^* = p_4^*\left(\frac{T_{5'}^*}{T_4^*}\right)^{\frac{k}{k-1}} \cong 1{,}44\,\mathrm{bar}$$

Punto 7

All'uscita dall'ugello, in condizioni di adattamento, si ha la pressione statica di uscita che uguaglia la pressione esterna:

$$p_7 = p_0$$

Da 6 a 7 (passaggio nell'ugello) non ci sono scambi di energia, pertanto la portata entalpica si conserva, e anche la temperatura totale, in condizioni di isoentropia:

$$T_{7'}^* = T_6^*$$

Dalla trasformazione isoentropica e dal rendimento dell'ugello, si ricava ancora la temperatura dei gas di scarico:

$$\frac{T_{7'}}{T_6^*} = \left(\frac{p_{7'}}{p_6^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{p_0}{p_6^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} \Rightarrow T_{7'} = T_6^*\left(\frac{p_0}{p_6^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} \cong 559{,}2\,\mathrm{K}$$

$$\eta_U = \frac{\vec{L}_{reale}}{\vec{L}_{ideale}} = \frac{T_6^* - T_7}{T_6^* - T_{7'}} \Rightarrow T_7 = T_6^* + \eta_U(T_{7'} - T_6^*) \cong 559{,}8\,\mathrm{K}$$

Da un bilancio sull'ugello:

$$c_p T_6^* = c_p T_7 + \frac{v_7^2}{2} \Rightarrow v_7 = \sqrt{2c_p(T_6^* - T_7)} \cong 349{,}1\,\mathrm{m/s}$$

Spinta

Si può ora calcolare la spinta, con la formula relativa a ugelli adattati:

$$T = \dot{m}_1 v_8 + (1 + f)\dot{m}_2 v_7 - \dot{m}_a v_0 \cong 114336\,\mathrm{N} \cong 25706\,\mathrm{lb}$$

Il valore trovato della spinta si avvicina molto a quello dichiarato dal costruttore (26300 lb).

Consumo specifico

$$\mathrm{TSFC} = \frac{\dot{m}_f}{T} \cong 0{,}254\,\frac{\mathrm{kg/h}}{\mathrm{kgp}}$$