QUESITI
di
MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE

a cura di
Paolo Massioni
pmassio@hotmail.com

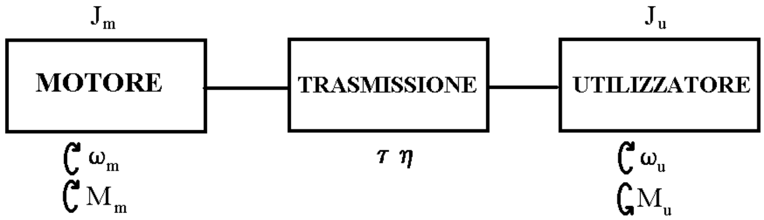
disponibile in rete all'indirizzo
http://pmassio.altervista.org

Queste pagine sono protette dalle leggi sul diritto d'autore. L'Autore vieta quindi espressamente qualunque utilizzo a fini di lucro di queste pagine. Chiunque è libero di scaricare, consultare, stampare e distribuire queste pagine purché esse non siano alterate e nessuno ne tragga vantaggio economico.

Questi appunti vengono resi pubblici dall'Autore al fine di rendere un utile servizio agli studenti. Nonostante la cura e le numerose revisioni del testo, l'Autore non può garantire l'assoluta correttezza del contenuto di queste pagine. Il contenuto di questo documento non è di per sé sufficiente per il superamento dell'esame.

disponibile in rete all'indirizzo http://pmassio.altervista.org

Descrivere il moto retrogrado, nel caso particolare del montacarichi.



In generale, si parla di “moto retrogrado” quando la potenza che passa nella trasmissione, invece di fluire dal motore all’utilizzatore, fluisce al contrario, cioè dall’utilizzatore al motore. Il che equivale a dire: considerando il teorema delle potenze nella formulazione convenzionale:

$$W_m - W_r - W_p = \frac{dE_c}{dt}$$

si ha moto retrogrado se:

$$\begin{cases} W_{in} < 0 \\ W_{out} < 0 \end{cases}$$

Dove W_{in} è la potenza che dal motore entra nella trasmissione (presa positiva entrante) e W_{out} è la potenza che esce dalla trasmissione ed entra nell’utilizzatore (presa positiva uscente dalla trasmissione).

Esprimendo dunque due bilanci di potenze, al motore e all’utilizzatore, si può scrivere:

$$M_m\omega_m - J_m\dot{\omega}_m\omega_m = W_{in}$$

$$W_{out} = M_u\omega_u + J_u\dot{\omega}_u\omega_u$$

Dalla conoscenza delle trasmissioni, sappiamo che:

$$W_{out} = \eta W_{in}$$

$$\omega_u = \tau\omega_m$$

per cui:

$$\eta\left(M_m\omega_m - J_m\dot{\omega}_m\omega_m\right) = M_u\tau\omega_m + J_u\tau^2\dot{\omega}_m\omega_m$$

In moto retrogrado invece, la potenza passa dall’utilizzatore al motore, pertanto il rendimento della trasmissione andrà visto in senso inverso, cioè varrà che:

$$M_m\omega_m - J_m\dot{\omega}_m\omega_m = \eta^*\left(M_u\tau\omega_m + J_u\tau^2\dot{\omega}_m\omega_m\right)$$

Dove η^* è il rendimento della trasmissione in moto retrogrado, che in generale è diverso da quello in moto diretto.

Si possono ora considerare due casi:

1) REGIME ASSOLUTO

Gli alberi ruotano a velocità angolare costante, per cui l’espressione trovata si riduce a:

$$\eta M_m\omega_m = M_u\tau\omega_m$$

in cui il termine di sinistra e quello di destra sono rispettivamente la potenza motrice (netta all’utilizzatore) e quella resistente. È possibile il moto retrogrado nel caso il termine η^* sia sufficientemente grande (cosa che in realtà avviene sempre: è difficile che da sola la trasmissione sia in grado di assorbire tutta la potenza che viene dall’utilizzatore). Nel qual caso, è evidente come sia condizione necessaria e sufficiente per il moto retrogrado che anche una sola delle due potenze sia negativa.

disponibile in rete all'indirizzo http://pmassio.altervista.org

2) REGIME DI MOTO VARIO

$$\eta\left(M_m\omega_m - J_m\dot{\omega}_m\omega_m\right) = M_u\tau\omega_m + J_u\tau^2\dot{\omega}_m\omega_m$$

Da questa formula è facile capire che le due condizioni necessarie e sufficienti enunciate prima diventano solamente necessarie. Infatti ora entrano in gioco le forze d'inerzia, e non è detto che se una delle potenze è negativa lo sia anche l'altra; pertanto le condizioni da porre per il moto retrogrado saranno:

$$M_m\omega_m - J_m\dot{\omega}_m\omega_m < 0 \quad \vee \quad M_u\tau\omega_m + J_u\tau^2\dot{\omega}_m\omega_m < 0$$

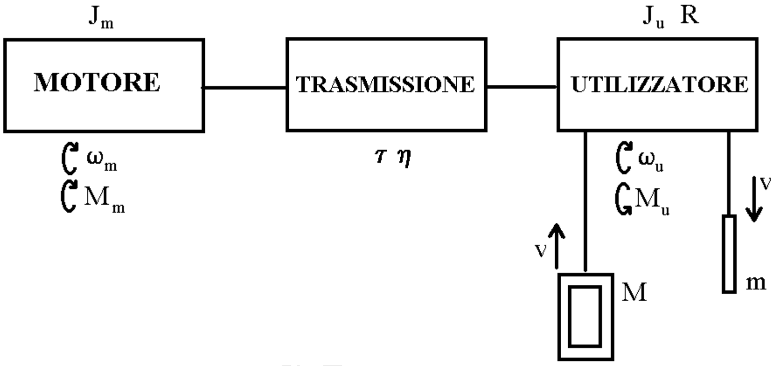
In effetti questo deriva dal fatto che le forze d'inerzia stesse possono erogare o assorbire potenza.

In moto retrogrado, la potenza passa dall'utilizzatore al motore, pertanto il rendimento della trasmissione andrà visto in senso inverso, cioè varrà che:

$$M_m\omega_m - J_m\dot{\omega}_m\omega_m = \eta^*\left(M_u\tau\omega_m + J_u\tau^2\dot{\omega}_m\omega_m\right)$$

Dove η^* è il rendimento della trasmissione in moto retrogrado, che in generale è diverso da quello in moto diretto.

Per quanto riguarda l'ascensore, supponiamo che esso sia un macchinario del tipo:



Dove l'utilizzatore altro non è che un argano di raggio *R* su cui è montata una fune inestensibile di massa trascurabile, che non scorre sulle pulegge. Possiamo scrivere, dalla "geometria" del macchinario, considerando la situazione di cabina (massa *M*) in salita:

$$v = R\omega_u$$

$$W_u = (M-m)gv = (M-m)gR\omega_u$$

E quindi riprendendo l'espressione ricavata prima:

$$\eta\left(M_m\omega_m - J_m\dot{\omega}_m\omega_m\right) = (M-m)gR\tau\omega_m + J_u\tau^2\dot{\omega}_m\omega_m + (M+m)R^2\tau^2\dot{\omega}_m\omega_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\left(M_m\omega_m - J_m\dot{\omega}_m\omega_m\right) = (M-m)gR\tau\omega_m + J'_u\tau^2\dot{\omega}_m\omega_m$$

per cui si avrà moto retrogrado se

$$(M-m)gR\tau\omega_m + J'_u\tau^2\dot{\omega}_m\omega_m < 0$$

Pertanto la condizione:

$$(M-m)gR\tau\omega_m < 0 \Rightarrow M-m < 0$$

è soltanto necessaria per avere un moto retrogrado (con cabina in salita).

A volte può essere utile cercare di evitare che in moto retrogrado (e cioè spontaneo) non si superino certe accelerazioni per motivi di sicurezza, evidenti nel caso dell'ascensore. Vale che:

$$M_m\omega_m - J_m\dot{\omega}_m\omega_m = \eta^*\left(M_u\tau\omega_m + J_u\tau^2\dot{\omega}_m\omega_m\right)$$

Esprimendo la derivata della velocità angolare del motore (che è anche quella dell'utilizzatore a meno di un fattore τ):

disponibile in rete all'indirizzo pmassio.altervista.org

$$\dot{\omega}_m = \frac{M_m + (m - M)\eta^* gR\tau}{J_m + \eta^* J'_u \tau^2}$$

si vede che aumentando l'entità dei momenti d'inerzia è possibile contenere questa accelerazione. È possibile ottenere tutto ciò ad esempio montando un volano solidale all'argano. In alternativa è possibile sfruttare trasmissioni che abbiano un rendimento in moto retrogrado molto basso (come gli arpionismi).

Descrivere i principi di funzionamento delle frizioni, sviluppando analiticamente, in particolare, il transitorio di un sistema composto da motore e utilizzatore fra i quali sia interposta una frizione.

La frizione è un meccanismo di trasmissione che sfrutta fenomeni sia di attrito dinamico (nei transitori) sia di attrito statico (a regime). Sull'albero dell'utilizzatore è montato un disco, mentre sull'albero motore è calettata la scatola della frizione, che è composta da due superfici rotanti solidali all'albero motore (una delle quali è detta "spingidisco", perché tramite molle precaricate fa sì che le superfici rotanti siano a contatto con il disco).
Le frizioni presentano numerosi vantaggi pratici, fra i quali la possibilità di "staccare", cioè di separare le superfici a contatto e permettere così all'albero motore e quello utilizzatore di ruotare indipendentemente, cosa che risulta utile all'avviamento dei motori a combustione interna (che non sarebbero in grado di reggere la coppia resistente da subito e si spegnerebbero), per il cambio delle marce o per l'arresto del veicolo senza lo spegnimento del motore.
Supponiamo che i raggi delle porzioni delle superfici a contatto (corone circolari) siano r e R, e che le molle abbiano un precarico N.
Cominciamo ad analizzare un transitorio: supponiamo l'albero motore in rotazione libera, e l'albero condotto fermo. Quando le superfici vengono fatte aderire, esse strisceranno l'una contro l'altra, rispettivamente accelerando e rallentando, come si vedrà. Il precarico sarà dato da:

$$N = \int_r^R 2\pi r' p(r') dr'$$

dalla teoria sappiamo che:

$$p(r) = \frac{k}{r}$$

per cui:

$$N = \int_r^R 2\pi k dr' = 2\pi k(R - r)$$

$$k = \frac{N}{2\pi(R - r)}$$

Quando le due superfici a contatto strisciano, abbiamo che la coppia di attrito sarà:

$$M_d = \int_r^R 2\pi r' f \frac{k}{r'} r' dr' = 2\pi f \frac{N}{2\pi(R - r)} \left[\frac{1}{2}(r')^2\right]_r^R = fN \frac{(R^2 - r^2)}{2\pi(R - r)} = fN \frac{R + r}{2}$$

come se ci fosse un "braccio equivalente" pari alla media fra i due raggi. Questa coppia va raddoppiata perché le superfici a contatto sono 4 e non solo 2.
Da un esame delle potenze, possiamo scrivere per il motore:

$$M_m \omega_m - fN(R + r)\omega_m = J_m \dot{\omega}_m \omega_m$$

poiché in genere

$$M_m \leq fN(R + r)$$

(altrimenti la frizione servirebbe a ben poco!) l'albero motore rallenterà con una legge del moto del tipo:

disponibile in rete all'indirizzo http://pmassio.altervista.org

$$\omega_m(t)=\omega_{m0}-\frac{fN(R+r)-M_m}{J_m}t$$

Invece, dall'esame delle potenze sull'utilizzatore (nota: il momento d'inerzia associato all'utilizzatore deve tenere conto della massa ridotta di tutti gli organi collegati, ad esempio ruote, massa del veicolo, ecc.):

$$-M_r\omega_r+fN(R+r)\omega_r=J_r\dot{\omega}_r\omega_r$$

dato che:

$$M_r\leq fN(R+r)$$

e dunque l'albero dell'utilizzatore (inizialmente fermo) accelererà con una legge del moto del tipo:

$$\omega_r(t)=\frac{fN(R+r)-M_r}{J_r}t$$

E' chiaro che esisterà un istante di tempo t' in cui avverrà che:

$$\omega_r(t')=\omega_m(t')=\omega$$

A quel punto il transitorio può considerarsi esaurito, e i due alberi saranno alla stessa velocità angolare, a patto di rispettare le condizione di adesione:

$$J_r\dot{\omega}+M_r\leq f_aN(R+r)$$
$$J_m\dot{\omega}+M_m\leq f_aN(R+r)$$

Dai conti svolti si possono fare alcune considerazioni.
La coppia trasmessa durante l'adesione può essere maggiore di quella trasmessa durante lo strisciamento; tuttavia oltre un certo limite cessa l'adesione e la coppia trasmessa scende bruscamente; questo fa si che la frizione funga anche da "giunto di sicurezza" poiché non permette agli organi di essere sollecitati oltre una certa misura (per esempio, l'albero motore durante una frenata di emergenza). Tuttavia appare allo stesso modo chiaro che la coppia che sollecita gli organi della frizione durante il transitorio è maggiore della coppia motrice, cosa di cui il dimensionamento deve tenere conto onde evitare rotture in fase di innesto. Inoltre per migliorare le prestazioni (ridurre la durata dei transitori) potrebbe essere utile ridurre l'entità dei momenti d'inerzia ridotti agli alberi, ma tuttavia questo può portare ad una minore resistenza e più facili rotture.

Principi di funzionamento dei rotismi epicicloidali e loro applicazioni.

I rotismi epicicloidali sono dei particolari tipi di trasmissione, in cui i perni delle ruote sono montati su un supporto rigido detto "portatreno", che a sua volta è libero di ruotare ed è accoppiato ad un altro albero. Le ruote montate sul portatreno sono dette "satelliti". Il rotismo epicicloidale coinvolge dunque ben tre diverse velocità angolari, dei due alberi (ω_1e ω_2) e quella del portatreno (Ω). Il rapporto di trasmissione è definito fra le velocità angolare relative dei due alberi rispetto al portatreno, secondo la formula di Willis:

$$\tau=\frac{\omega_1-\Omega}{\omega_2-\Omega}$$

Esempi di rotismi epicicloidali sono il differenziale dell'automobile e il rotismo di Fairbairn.
1) Il differenziale dell'automobile è costituito da un portatreno collegato con il pignone del ponte, e due satelliti e due ruote dentate collegate alle ruote della vettura. Il numero dei denti dei satelliti è uguale (a), così come quello delle altre due ruote (b). A portatreno fermo avremo che:

$$\tau=-\frac{a}{b}\frac{b}{a}=-1=\frac{\omega_1-\Omega}{\omega_2-\Omega}$$

disponibile in rete all'indirizzo http://pmassio.altervista.org

il che torna utile tenendo conto che, per evitare lo slittamento, in curva le due ruote devono avere velocità diverse. Un differenziale semplice di questo tipo tuttavia non può essere usato con tutta tranquillità perché nelle situazioni in cui una sola delle due ruote motrici faccia aderenza, essa rimarrebbe ferma e l'altra girerebbe a doppia velocità ma a vuoto; per questo esistono dei differenziali "autobloccanti" che pongono un limite sulla differenza fra le due velocità angolari.
2) Il rotismo di Fairbairn è un meccanismo che consente di avere piccoli (o grossi) rapporti di trasmissione in piccolo spazio. Possono essere usati ad esempio per ridurre la velocità angolare all'albero di un motore a turbina al rotore di un elicottero, le cui pale devono alla periferia muoversi a velocità minore di quella del suono. Il rotismo è composto da un portatreno (velocità Ω) collegato ad un primo albero, dentato internamente (*a* denti), su cui è montata una ruota (*b* denti, velocità ω_1 solidale ad una seconda ruota (*c* denti) a cui è esternamente montata una corona dentata (*d* denti, velocità ω_2) solidale all'altro albero. A portatreno fermo abbiamo che:

$$\tau = \frac{c}{d}\frac{a}{b}$$

Si deve cercare di avere questo numero il più possibile vicino ad 1. Se viene bloccata la ruota interna e si sfrutta il rapporto di trasmissione fra i due alberi, abbiamo che:

$$\omega_1 = 0 \Rightarrow \tau = \frac{-\Omega}{\omega_2 - \Omega} \Rightarrow \tau' = \frac{\omega_2}{\Omega} = (1-\tau)$$

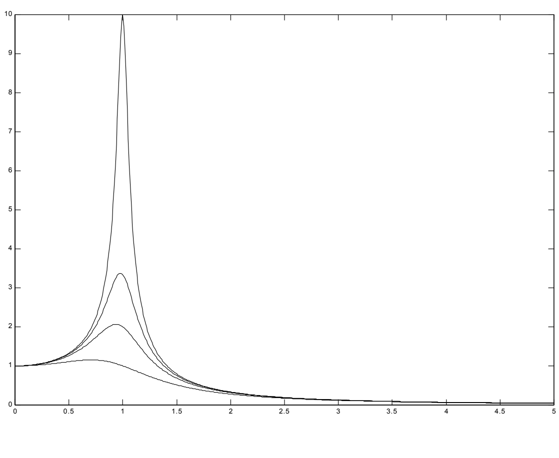
che è tanto più piccolo quanto più τ è vicino ad 1. Nel caso dell'elicottero, al portatreno andrà dunque collegato il motore, e al rotore l'altro albero.

Fondazione rigida e fondazione sospesa: si confrontino criticamente le due soluzioni giustificandone le specifiche caratteristiche.

Il problema in questione riguarda la scelta del tipo di fondazione da porre a sostegno di un macchinario che genera vibrazioni (ad esempio un motore, che per quanto ci si possa sforzare non sarà mai perfettamente equilibrato). Per capire meglio il senso delle due scelte, conviene ricordare la formula del fattore di magnificazione:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 2\left(\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

(dove tutte le lettere hanno il significato consueto). Il grafico di tale funzione appare:

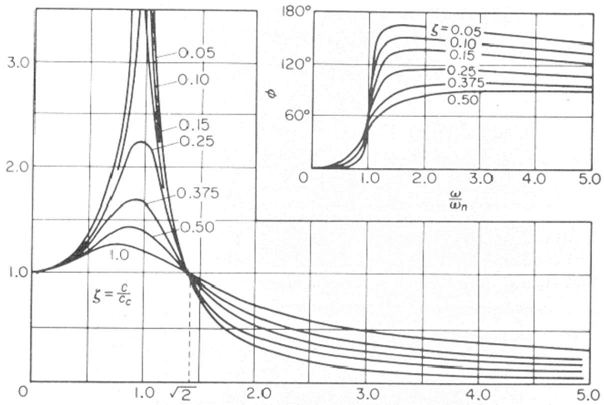


Per i carichi dinamici esercitati sul suolo, vale invece la formula:

disponibile all'indirizzo http://pmassio.altervista.org

$$\frac{F}{F_0} = \frac{\sqrt{1+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+2\left(\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

il cui grafico è il seguente (per diversi valori dello smorzamento):



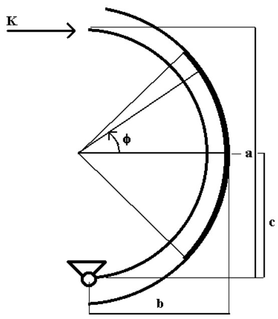
(si ricorda che le frequenza di risonanza è: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$).

L'esigenza che si presenta nel progetto della fondazione è quella di contenere sia l'oscillazione sia i carichi dinamici sul suolo.
La soluzione migliore sembrerebbe quella di tenere la frequenza di lavoro molto al di sopra della frequenza propria (almeno 4 volte tanto), in quanto si vede che al crescere del rapporto il fattore di magnificazione tende a zero. Quindi si potrà agire cercando di ridurre la frequenza propria dell'oscillatore, o aumentando la massa del sistema (ponendo un grosso basamento al di sotto del macchinario, ad esempio, che oltre ad aumentare la massa ripartisce il carico su di una superficie maggiore), oppure riducendo la rigidezza degli elementi elastici. In questo caso si parla appunto di "fondazione sospesa". Dato che il valore dei carichi dinamici tende a zero tanto più velocemente quanto è più piccolo lo smorzamento, converrà che esso sia contenuto (ma non troppo per motivi che saranno chiariti fra poco).
Ci sono però situazioni in cui tale soluzione non può essere intrapresa per i più svariati motivi, a partire da motivi meramente economici fino al fatto più consistente che all'avvio ed allo spegnimento del macchinario ci sarà un certo periodo di tempo di transitorio verso le alte frequenze, durante il quale la frequenza delle oscillazioni si avvicina e supera la frequenza propria; la massima oscillazione del grafico di sopra non verrà raggiunta (perché si tratta di condizioni di regime), ma più è lento il transitorio e più ci si avvicinerà a questi valori pericolosi (e tanto più pericolosi quanto più piccolo è lo smorzamento: per questo non dovrà essere troppo piccolo). Pertanto per alcuni macchinari (ad esempio dunque, per quelli con transitori troppo lenti) sarà conveniente tenere la frequenza di lavoro molto al di sotto della frequenza propria, e si parlerà di "fondazione rigida". Si cercherà dunque di tenere alta la frequenza propria dell'oscillatore, riducendo se possibile la massa e utilizzando elementi elastici molto rigidi (che in genere sono anche poco smorzati).

Descrivere i principi di funzionamento dei freni confrontando in particolare quelli a ceppi e quelli a disco.

disponibile in rete all'indirizzo http://pmassio.altervista.org

I freni sono organi meccanici il cui scopo è rallentare la rotazione di un albero o mantenerlo fermo. Si parla di "freni di stazionamento" per quelli il cui scopo specifico è il mantenimento della quiete di un dato organo (ad esempio: il freno a mano dell'auto che tiene bloccate le ruote), di "freni di lavoro" per quelli che servono a rallentare e controllare la velocità e di "freni di arresto" per quelli che devono portare l'organo fino alla quiete. Ci sono svariati tipi di freni che basano il loro funzionamento su diversi fenomeni fisici, dai freni elettromagnetici a quelli aerodinamici (questi ultimi ad esempio sono usati eminentemente per il tracciamento delle curve caratteristiche dei motori o per il rodaggio). I freni più utilizzati nei veicoli sono quelli meccanici, che basano il loro effetto sull'attrito, dinamico per i freni di lavoro o arresto, e statico per i freni di stazionamento.
Di freni meccanici esistono due categorie principali: i freni a ceppi o tamburo e i freni a disco.
I freni a ceppi funzionano facendo strisciare due ganasce o ceppi contro l'interno o l'esterno di una ruota.



Nel disegno, una delle ganasce (più a sinistra), incernierata in basso, preme sulla superficie interna della ruota lungo una guarnizione simmetrica di ampiezza $2\phi_1$ grazie alla forza K. Si vede anche il riferimento della misura degli angoli ϕ.
La relazione di Coulomb è valida solo in forma differenziale data la curvatura della superficie:

$$dT = fdN = rlfp(\phi)d\phi$$

Dove r è il raggio di curvatura delle superfici a contatto, l lo spessore del ceppo e p la pressione. Il problema viene dunque a richiedere lo studio della distribuzione della pressione. Definiamo ϕ_0 l'angolo per cui:

$$\int_{-\phi_1}^{\phi_1} p(\phi)\sin(\phi-\phi_0)d\phi = 0$$

Il che significa che la risultante delle azioni di pressione N sarà diretta secondo questo angolo, e che la T risultante delle azioni tangenziali (che è la somma infinitesimale di contributi proporzionali punto per punto secondo f a dN) sarà normale alla N. Queste azioni saranno dunque esprimibili come:

$$N = rl\int_{-\phi_1}^{\phi_1} p(\phi)\cos(\phi-\phi_0)d\phi$$

$$T = rlf\int_{-\phi_1}^{\phi_1} p(\phi)\cos(\phi-\phi_0)d\phi = fN$$

e così il momento frenante:

$$M_f = r^2lf\int_{-\phi_1}^{\phi_1} p(\phi)d\phi$$

Dal rapporto fra momento frenante e azione tangenziale si potrebbe ricavare un braccio equivalente h per l'azione tangenziale stessa.
La forza K fa ruotare il ceppo attorno alla cerniera: questo movimento può essere scomposto in una rotazione attorno al centro della ruota (che non fa avvicinare le due superfici) e una traslazione orizzontale; lo spessore di materiale asportato sarà proporzionale alla componente normale alle superfici di questo spostamento:

Disponibile in rete all'indirizzo http://pmassio.altervista.org

$$\delta = \delta_0 \cos(\phi)$$

per cui, dall'ipotesi di Reye:

$$dL = \omega r f dN = \omega r f p(\phi) dA = k\delta_0 \cos(\phi) dA$$

dato che ω, r, k, f sono costanti segue che:

$$p = p_0 \cos(\phi)$$

di cui è immediata conseguenza che:

$$\phi_0 = 0$$

perciò:

$$N = rl\int_{-\phi_1}^{\phi_1} p_0 \cos^2(\phi) d\phi = rlp_0 \left[\frac{\phi}{2} + \frac{\sin(2\phi)}{4}\right]_{-\phi_1}^{\phi_1} = rlp_0\left(\phi_1 + \frac{1}{2}\sin(2\phi_1)\right)$$

$$T = rlfp_0\left(\phi_1 + \frac{1}{2}\sin(2\phi_1)\right)$$

e così il momento frenante:

$$M_f = r^2 lf \int_{-\phi_1}^{\phi_1} p_0 \cos(\phi) d\phi = 2r^2 lfp_0 \sin(\phi_1)$$

Si possono fare ulteriori considerazioni pensando alla presenza di un altro ceppo (simmetrico rispetto alla verticale a quello raffigurato nel disegno).
Per il ceppo di destra (se la ruota girasse in senso antiorario), da un equilibrio alla rotazione attorno alla cerniera:

$$Tb + Nc = Ka \Rightarrow Nfb + Nc = Ka \Rightarrow N = \frac{a}{c + fb}K$$

per l'altro:

$$-Tb + Nc = Ka \Rightarrow -Nfb + Nc = Ka \Rightarrow N = \frac{a}{c - fb}K$$

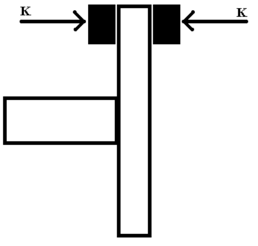
Da cui si vede facilmente che il freno non è equilibrato né orizzontalmente né verticalmente. A questo problema si può ovviare costruendo due ceppi a simmetria centrale rispetto al centro della ruota (freni autoequilibrati). Il braccio equivalente:

$$h = \frac{M_f}{T} = \frac{2r^2 lfp_0 \sin(\phi_1)}{rlfp_0\left(\phi_1 + \frac{1}{2}\sin(2\phi_1)\right)} = \frac{2r\sin(\phi_1)}{\phi_1 + \frac{1}{2}\sin(2\phi_1)}$$

Il momento frenante totale sarà dunque:

$$M_f = hf\left(\frac{a}{c - fb} + \frac{a}{c + fb}\right)K = 2hfK\frac{ab}{c^2 - f^2 b^2}$$

da cui si nota che il freno può impuntarsi se $c = fb$.
Per quanto riguarda invece i freni a disco, il loro funzionamento si basa sullo strisciamento di due pinze su di un disco solidale all'albero da frenare.



Le pinze toccano il disco da un raggio r ad un raggio R. Il carico sarà:

disponibile in rete all'indirizzo http://pmassio.altervista.org

$$K = \int_r^R \theta_0 r' p(r') dr'$$

dalla teoria sappiamo che:

$$p(r) = \frac{k}{r}$$

per cui:

$$K = \int_r^R \theta_0 k dr' = \theta_0 k(R - r)$$

$$k = \frac{K}{\theta_0 (R - r)}$$

Quando le due superfici a contatto strisciano, abbiamo che la coppia di attrito sarà:

$$M_f = \int_r^R \theta_0 r' f \frac{k}{r'} r' dr' = \theta_0 f \frac{K}{\theta_0 (R - r)} \left[\frac{1}{2} (r')^2 \right]_r^R = fK \frac{(R^2 - r^2)}{2(R - r)} = fK \frac{R + r}{2}$$

come se ci fosse un “braccio equivalente” pari alla media fra i due raggi. Questa coppia va raddoppiata perché le superfici a contatto sono 4 e non solo 2.
Per cui:

$$M_{disco} = 2 fKR_m$$

mentre:

$$M_{ceppi} = 2hfK \frac{ab}{c^2 - f^2 b^2}$$

a parità di dimensioni:

$$(R_m = \frac{a}{2} = b = c)$$

accade che:

$$M_{ceppi} = 4hfK \frac{1}{1 - f^2} > 4M_{disco}$$

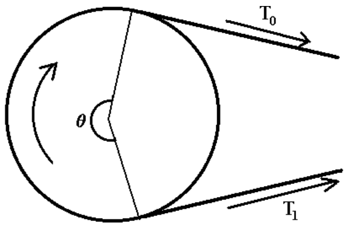
Appare evidente che un freno a disco, a parità di forza impressa, ha un potere frenante molto minore. Pertanto conviene aggiungere dei servofreni che moltiplichino la forza impressa per avere un pari effetto frenante. Inoltre hanno dei problemi di stabilità alle sollecitazioni sulle pinze in fase di arresto del veicolo. I freni a disco tuttavia hanno altro vantaggi: sono più leggeri, disperdono meglio il calore prodotto e le particelle di impurità sovrastanti (per la forza centrifuga). Tuttavia non sono indicati come freni di stazionamento perché questi ultimi per via delle alte pressioni che generano possono dare origine a fenomeni di incollaggio, pertanto anche nei veicoli con freni di lavoro a disco sono presento freni a tamburo per lo stazionamento.

Si parli delle trasmissioni a cinghie trapezoidali spiegando tramite uno sviluppo analitico come avviene la trasmissione di coppia; si concluda con un confronto tra l’utilizzo di cinghie piane, trapezoidali e dentate.

La cinghia è un elemento elastico che trasmette la coppia da una puleggia motrice (raggio *R*) ad una puleggia condotta (*r*), sfruttando il fenomeno di attrito statico (in quanto la cinghia elastica non striscia sulla puleggia). Si tratta spesso di una trasmissione conveniente per vari motivi, offrono buoni rendimenti (circa 0,98) sono silenziose, non richiedono lubrificazioni o particolari manutenzioni (a patto di sostituire la cinghia quando è consumata), e in più costituiscono anche un

disponibile in rete all'indirizzo http://pmassio.altervista.org

"giunto di sicurezza" che non permette la trasmissione di azioni superiori ad una certa soglia (oltre la quale cessa la condizione di adesione statica.)



Da un equilibrio alla rotazione (in regime assoluto) segue che:

$$(T_1 - T_0)R = M_m$$

Tuttavia c'è un limite alla massima coppia trasmissibile (dovuto alla condizione di adesione). La relazione di Coulomb vale solo in forma differenziale, per cui (in condizione di incipiente slittamento):

$$dT = f_a dN$$

La cinghia deve essere precaricata, e ci sarà una pressione agente fra la cinghia e la puleggia. Dall'equilibrio alla traslazione radiale per un elemento di cinghia (supposta pressoché priva di massa) si ha:

$$T\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) + (T + dT)\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) = lrp(\phi)d\phi$$

(dove l è lo spessore della cinghia). Tramite alcune semplificazioni e trascurando gli ordini superiori al primo, si ha:

$$Td\phi = lrp(\phi)d\phi \Rightarrow T = lrp(\phi)$$

Quindi si può scrivere:

$$\frac{dT}{T} = \frac{f_a dN}{lrp(\phi)} = \frac{f_a lrp(\phi)d\phi}{lrp(\phi)} = f_a d\phi$$

equazione differenziale a variabili separabili da cui integrando si ottiene:

$$\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) = f_a\theta \Rightarrow T_1 = T_0 e^{f_a\theta}$$

chiamando Q la forza trasmissibile:

$$Q = T_1 - T_0 = T_0\left(e^{f_a\theta} - 1\right)$$

La situazione considerata era quella di incipiente slittamento; per cui in generale varrà che:

$$Q \leq T_0\left(e^{f_a\theta} - 1\right)$$

dove il valore da tenere in considerazione è il minore dei due calcolati per le due pulegge.
La cinghia trapezoidale è un espediente per aumentare questa massima forza trasmissibile. Infatti, essa non poggia sulla puleggia con la sua superficie inferiore (cinghia piana), ma con le superfici laterali che sono inclinate rispetto alla verticale di un angolo α. Segue che se la pressione applicata in verticale sarà pari a p, essa sulle superfici laterali diverrà pari a $p/\sin(\alpha)$. Per cui sarà come se in coefficiente di attrito statico fosse diventato:

$$f_a' = \frac{f_a}{\sin(\alpha)} > f_a$$

Per questo motivo le cinghie trapezoidali possono trasmettere più coppia anche con un minore precarico. Tuttavia tendono a consumarsi in modo piuttosto veloce rispetto alle cinghie piane e pertanto vanno sostituite più spesso; infatti, quando i loro fianchi sono del tutto consumati la cinghia di fatto giunge a toccare la cava della puleggia e si comporterà come una cinghia piana (con

disponibile in rete all'indirizzo http://pmassio.altervista.org

rischio di strisciamento). Le cinghie dentate invece basano la trasmissione della coppia non sull'attrito ma sulla spinta di denti che si accoppiano a ruote dentate apposite; pertanto per certi aspetti sono più simili agli ingranaggi che agli altri tipi di cinghie. Offrono un rendimento elevato ed un rapporto di trasmissione costante (senza rischi di strisciamenti), il precarico necessario è minimo, sono silenziose e richiedono poca lubrificazione e manutenzione.

disponibile in rete all'indirizzo http://pmassio.altervista.org