ESERCIZI
di
FLUIDODINAMICA

a cura di
Paolo Massioni
pmassio@hotmail.com

disponibile in rete all'indirizzo
http://pmassio.altervista.org

Si ringrazia Roberto Milani per aver contribuito con l'esercizio 14 e una attenta revisione del testo.

Esercizio 1

Una lastra piana indefinita di spessore ***t*** = 1 mm viene trascinata con velocità imposta ***V*** sulla mezzeria di un canale piano indefinito di altezza ***h***, contenente acqua in quiete ed in condizioni standard.

Assegnati:

h [mm] = [2 + (0,01 **N)]** ***V*** [m/s] = [1 + (0,05(**N** + **C**)]

Si calcolino:

- il numero di Reynolds ***Re*** della corrente, basato sulla velocità media del fluido;
- la forza per unità di superficie τ, che agisce sulla lastra;
- la potenza per unità di superficie ***W*** che è necessario applicare alla lastra.

SOLUZIONE (N = C = 0):

Dalla descrizione, sembra si tratti di una doppia corrente di Newton (sopra e sotto la lastra indefinita), simmetrica rispetto al piano della mezzeria.
Essendo noto che la corrente di Newton ha un andamento lineare della velocità parallela alla parete, e velocità ortogonale nulla, è immediato che la velocità media sia la metà della velocità ***V***.

$$V_m = \frac{1}{2}V$$

Se ci si riferisce all'altezza di ognuno dei due mezzi canali ((***h*** – ***t***)/2):

$$\mathrm{Re} = \frac{V_m(h-t)}{2\nu_{\mathrm{H_2O}}} \cong 220$$

Il che conferma che ci troviamo nell'ambito di validità della soluzione di Newton.
La forza per unità di superficie è 2 volte lo sforzo tangenziale a parete (perché agisce sui due lati della lastra!)

$$\tau = 2\mu\frac{\partial u}{\partial y} = 2\mu\frac{V}{\frac{1}{2}(h-1\,\mathrm{mm})} = 4\mu\frac{V}{h-1\,\mathrm{mm}} \cong 4{,}56\ \mathrm{Pa}$$

In verso opposto al moto della lastra. Le derivate sono diventate rapporti fra differenze finite in quanto la distribuzione della velocità è lineare e non cambia nulla.
Il calcolo della potenza è ora banale:

$$W = \tau V \cong 4{,}56\ \mathrm{W/m^2}$$

Esercizio 2

Di una bolla di sapone sono noti:
- lo spessore ***S*** del film di liquido ***S*** [m] = [1 + (0,03 **N**)] · 10^{-6}
- la velocità di caduta ***V*** in regime di Stokes ***V*** [m/s] = [3 + (0,2 C)] · 10^{-3}

Nelle ipotesi che:
- la bolla sia rigida e perfettamente sferica,
- l'aria contenuta al suo interno abbia proprietà fisiche identiche a quelle dell'aria all'esterno, che è in quiete ed in condizioni standard,

determinare il diametro esterno ***D*** della bolla.

SOLUZIONE (N = C = 0):

Sulla bolla agiscono tre forze:
- il peso della bolla (del film liquido e dell'aria contenuta)
- la spinta di Archimede
- la resistenza viscosa dell'aria

Il film è composto essenzialmente di acqua; considero che il suo volume sia piccolo rispetto al volume della bolla, pertanto la spinta di Archimede dovuta al volume del liquido viene trascurata. La spinta di Archimede del volume di aria dentro la bolla bilancia completamente il peso della bolla.
Non resta che calcolare i moduli delle altre due forze.
Peso (del film di liquido):

$$P = \text{Volume } \rho_{Acqua} g = D^2 S \pi \rho_{Acqua} g$$

Si è espresso il volume della corona sferica in modo semplificato, come superficie esterna della sfera moltiplicato per lo spessore: approssimazione accettabile nell'ipotesi che il raggio della bolla sia molto maggiore dello spessore.
Resistenza (in regime di Stokes):

$$R = \frac{1}{2}\rho_{Aria}\left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi \frac{24}{\text{Re}} V^2 = \frac{\pi}{8} D^2 \rho_{Aria} \frac{24\mu_{Aria}}{\rho_{Aria} D V} V^2 = 3\pi D \mu_{Aria} V$$

Le due forze sono opposte in verso e dovranno essere uguali in modulo:

$$P = R$$

$$D^2 S \pi \rho_{Acqua} = 3\pi D \mu_{Aria} V$$

da cui:

$$D = 3\frac{\mu_{Aria} V}{S g \rho_{Acqua}} \cong 1{,}63 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

che convalida le approssimazione fatte.

Esercizio 3

In un condotto rettilineo con sezione costante di diametro $\boldsymbol{D}$ scorre un fluido viscoso con velocità media $\boldsymbol{V_0}$ = 4 m/s.
Tale condotto principale si biforca in modo simmetrico in due condotti di uguale diametro $\boldsymbol{D}$, lunghi rispettivamente $\boldsymbol{L_1}$ e $\boldsymbol{L_2}$, che scaricano nell'atmosfera.

Dati:

$\boldsymbol{D}$ [m] = (1 + 0,1 **N**) $\boldsymbol{L_1}$ [m] = [50 $\boldsymbol{D}$ + 10 **N**] $\boldsymbol{L_2}$ [m] = [(5 + 0,5 **C**)$\boldsymbol{L_1}$]

Ipotizzando che il coefficiente di perdita di carico di ciascun condotto sia λ = 0,002, e trascurando le perdite di carico locali nella diramazione, si determinino le portate in volume in uscita dai due condotti.

SOLUZIONE (N = C = 0):

Consideriamo tre punti del condotto:
- punto 0: ingresso della biforcazione
- punto 1: uscita dal primo condotto
- punto 2: uscita dal secondo condotto

Vale:

$$\begin{cases} H_1 = H_0 - \Delta H_1 \Rightarrow H_0 = H_1 + \Delta H_1 \\ H_2 = H_0 - \Delta H_2 \Rightarrow H_0 = H_2 + \Delta H_2 \end{cases} \Rightarrow H_1 + \Delta H_1 = H_2 + \Delta H_2$$

Per le note relazioni sulle altezze e sulle perdite di carico, si può scrivere (ipotizzando un coefficiente di sbocco pari a 1):

$$H_1 + \Delta H_1 = H_2 + \Delta H_2$$

$$\frac{1}{2}\frac{V_1^2}{g} + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{V_1^2}{g}\lambda\frac{L_1}{D} = \frac{1}{2}\frac{V_2^2}{g} + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{V_2^2}{g}\lambda\frac{L_2}{D}$$

$$V_1^2\left(1 + \lambda\frac{L_1}{D}\right) = V_2^2\left(1 + \lambda\frac{L_2}{D}\right)$$

da cui, estraendo la radice prendendo i valori positivi

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{1 + \lambda\frac{L_1}{D}}{1 + \lambda\frac{L_2}{D}}} \cong 0{,}856$$

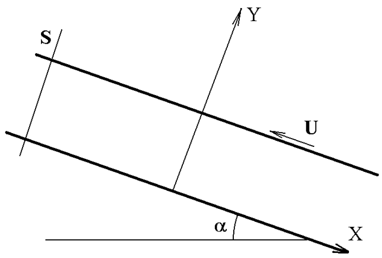
Dall'equazione di continuità si trova immediatamente che:

$$V_1 + V_2 = V_0$$

Dividendo per una delle due velocità compare il rapporto ricavato prima. I conti danno come risultati:

$$\begin{cases} V_1 = 2{,}16\ \text{m/s} \Rightarrow Q_1 = 1{,}68\ \text{m}^3/\text{s} \\ V_2 = 1{,}84\ \text{m/s} \Rightarrow Q_2 = 1{,}44\ \text{m}^3/\text{s} \end{cases}$$

Esercizio 4



Si consideri una corrente stazionaria di olio con densità ρ e viscosità dinamica μ che scorre tra due pareti piane indefinite e parallele, separate da una distanza $\boldsymbol{S}$ e inclinate dell'angolo α rispetto all'orizzontale.
La parete superiore ha velocità $\boldsymbol{U}$ rispetto a quella inferiore, che è fissa. Il gradiente di pressione è nullo in direzione X.

Dati:

ρ [kg/m^3] = 950 μ [Pa s] = 0,05 $\boldsymbol{S}$ [mm] = [2 +0,08(**N** + **C**)]
α [°] = [20 – 0,2(**N** + **C**)]

Si determini per quale valore di $\boldsymbol{U}$ la portata attraverso il canale è nulla.

SOLUZIONE (N = C = 0):

Si parte delle equazioni di Navier e Stokes nella versione per fluidi a proprietà costanti:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{V}} = 0$$
$$\frac{\partial\vec{\mathbf{V}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{V}}\cdot\vec{\nabla}\vec{\mathbf{V}} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{\mathbf{V}} + \vec{\mathbf{a}}$$

si può supporre per ragioni di simmetria che l'unica componente non nulla della velocità sia la u e che dipenda soltanto da Y. L'equazione di continuità diventa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

che dice una cosa già nota. Resta il bilancio della componente x della quantità di moto:

$$0 = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

che integrando due volte diventa:

$$0 = \nu u + \frac{1}{2}y^2 g\,\mathrm{sen}\,\alpha + Ay + B$$

da cui

$$u(y) = -\frac{1}{2}\frac{y^2 g}{\nu}\mathrm{sen}\,\alpha + A'y + B'$$

Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(S) = U \end{cases}$$

da cui otteniamo i valori delle costanti:

$$\begin{cases} B' = 0 \\ A' = \dfrac{U}{S} + \dfrac{1}{2}\dfrac{Sg}{\nu}\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

La portata è l'integrale lungo y della velocità:

$$Q = \int_0^S u\,dy = \int_0^S \left(-\frac{1}{2}\frac{y^2 g}{\nu}\operatorname{sen}\alpha + \frac{U}{S}y + y\frac{1}{2}\frac{Sg}{\nu}\operatorname{sen}\alpha \right) dy = -\frac{1}{6}\frac{S^3 g}{\nu}\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}US + \frac{1}{4}\frac{S^3 g}{\nu}\operatorname{sen}\alpha = 0$$

da cui:

$$U = -\frac{1}{6}\frac{S^2 g}{\nu}\operatorname{sen}\alpha \cong 4{,}25 \cdot 10^{-2}\ \text{m/s}$$

Esercizio 5

Due bacini idrici di estensione infinita hanno livelli del pelo libero che differiscono per una quota ***H***. Sulle superfici libere agisce la medesima pressione atmosferica ed i bacini sono collegati da un condotto di lunghezza ***L*** e diametro ***D***. Tale condotto, a 2/5 della sua lunghezza (punto ***S***), sale ad una quota ***h*** rispetto al livello del bacino superiore.

Dati:

H [m] = [6 + 0,1(**N** +**C**)] L [m] = 720 +**N** + **C** h [m] = [0,5 + 0,02 **N**]

D [m] = 1,2

e i coefficienti di perdita di carico all'imbocco ξ_{im} = 0,5 di sbocco ξ_{sb} = 1 e distribuito λ = 0,02 si determinino:

- la portata in volume ***Q*** attraverso il condotto
- la differenza ***Δp*** tra la pressione atmosferica e la pressione statica nel punto ***S***

SOLUZIONE (N = C = 0):

La perdita di carico (in altezza) deve essere pari alla differenza fra le due altezze ***H*** e ***h***.

$$H = \frac{1}{2}\left(\xi_{im} + \xi_{sb} + \lambda \frac{L}{D}\right)\frac{V^2}{g}$$

perciò

$$V = \sqrt{\frac{2gH}{\left(\xi_{im} + \xi_{sb} + \lambda \frac{L}{D}\right)}} \cong 2{,}95 \text{ m/s}$$

da cui:

$$Q = V\frac{\pi}{4}D^2 \cong 3{,}34 \text{ m}^3\text{/s}$$

Nel punto ***S*** si ha:

$$p_S + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g h + \frac{1}{2}\left(\xi_{im} + \lambda \frac{2}{5}\frac{L}{D}\right)\rho V^2 = p_0$$

da cui:

$$\Delta p = p_0 - p_S = \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g h + \frac{1}{2}\left(\xi_{im} + \lambda \frac{2}{5}\frac{L}{D}\right)\rho V^2 \cong 29801 \text{ Pa}$$

Esercizio 6

Si consideri una corrente d'acqua in condizioni standard a pelo libero, laminare e stazionaria, che scorre su di una parete piana indefinita verticale.
Si ipotizzi che sul pelo libero della corrente agisca la pressione atmosferica uniforme, che lo spessore ***s*** della corrente si mantenga anch'esso uniforme, e che lo sforzo tangenziale in corrispondenza del pelo libero sia nullo.
Assegnata la portata ***Q*** della corrente (per unità di apertura in direzione Z):

Q [kg/(ms)] = [0,4 + 0,01 **N** + 0,002 **C**]

Si determinino:
- lo spessore ***s*** della corrente;
- il valore dello sforzo tangenziale a parete τ_w;
- la velocità ***U*** in corrispondenza del pelo libero.

SOLUZIONE (N = C = 0):

Si parte delle equazioni di Navier e Stokes nella versione per fluidi a proprietà costanti:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{V}} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{V}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{\nabla} \vec{\mathbf{V}} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{\mathbf{V}} + \vec{\mathbf{a}}$$

si può supporre per ragioni di simmetria che l'unica componente non nulla della velocità sia la u e che dipenda solo dalla Y. L'equazione di continuità diventa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

che dice una cosa già nota. Resta il bilancio della componente x della quantità di moto:

$$0 = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g$$

che integrando due volte diventa:

$$0 = \nu u + \frac{1}{2} y^2 g + Ay + B$$

da cui

$$u(y) = -\frac{1}{2} \frac{y^2 g}{\nu} + A' y + B'$$

Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} \int_0^s u(y) dy = \dfrac{Q}{\rho} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

dalla seconda:

$$B' = 0$$

dalla prima:

$$\int_0^s u(y) dy = \int_0^s \left(-\frac{1}{2} \frac{y^2 g}{\nu} + A' y \right) dy = -\frac{1}{6} \frac{s^3 g}{\nu} + \frac{1}{2} A' s^2 = \frac{Q}{\rho}$$

$$A' = \frac{2Q}{s^2\rho} + \frac{1}{3}\frac{sg}{\nu}$$

La legge del moto è dunque:

$$u(y) = -\frac{1}{2}\frac{g}{\nu}y^2 + \left(\frac{2Q}{s^2\rho} + \frac{1}{3}\frac{sg}{\nu}\right)y$$

Il pelo del liquido è dove lo sforzo si annulla: pertanto sia

$$\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=s} = -\frac{g}{\nu}s + \frac{2Q}{s^2\rho} + \frac{1}{3}\frac{sg}{\nu} = 0$$

$$\frac{2Q}{\rho} + \left(\frac{1}{3}\frac{g}{\nu} - \frac{g}{\nu}\right)s^3 = 0$$

$$s = \sqrt[3]{3\frac{Q}{\rho}\frac{\nu}{g}} \cong 0{,}52 \text{ mm}$$

e dunque

$$U = u(s) = \frac{2Q}{s\rho} - \frac{1}{6}\frac{g}{\nu}s^2 \cong 1{,}15 \text{ m/s}$$

Infine:

$$\tau_w = \mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = \mu\left(\frac{2Q}{s^2\rho} + \frac{1}{3}\frac{sg}{\nu}\right) \cong 5{,}07 \text{ Pa}$$

Esercizio 7

Un chicco di grandine di forma sferica, di diametro assegnato **D** [mm] = [6 + 0,2 **C**] colpisce il suolo dopo aver raggiunto la velocità limite in atmosfera standard in quiete.
Si determinino:

- il valore della velocità di caduta limite $\boldsymbol{V}$;
- la corrispondente energia cinetica $\boldsymbol{E}$;
- la massima altezza $\boldsymbol{H}$ alla quale può rimbalzare, nell'ipotesi di urto elastico.

SOLUZIONE (N = C = 0):

La forza di attrito viscoso è data dalla formula:

$$F = \frac{1}{2}\frac{\pi D^2}{4} C_r \rho_{aria} V^2$$

Si può immaginare un Re > 1000, per cui il coefficiente è pari a 0,4. La forza viscosa pareggia la forza peso quando si raggiunge la velocità limite, per cui:

$$\frac{1}{2}\frac{\pi D^2}{4} C_r \rho_{aria} V^2 = \frac{4}{3}\pi \frac{D^3}{8} \rho_{ghiaccio} g$$

$$\frac{2}{5}\rho_{aria} V^2 = \frac{4}{3} D \rho_{ghiaccio} g$$

$$V = \sqrt{\frac{10}{3}\frac{D g \rho_{ghiaccio}}{\rho_{aria}}} \cong 12{,}0 \text{ m/s}$$

Si può vedere che questo risultato corrisponde a un Re = 4965 che conferma l'ipotesi iniziale.

$$E = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi \frac{D^3}{8} \rho_{ghiaccio} V^2 \cong 7{,}33 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{V^2}{g} \cong 7{,}34 \text{ m}$$

per il calcolo dell'altezza del rimbalzo si sono trascurate le forze viscose.

Esercizio 8

Una portata in massa $\boldsymbol{Q}$ di fluido con densità ρ scorre in regime laminare all'interno di un condotto cilindrico indefinito, con diametro $\boldsymbol{D}$ ed asse rettilineo orizzontale. Note le altezze $\boldsymbol{h_1}$ e $\boldsymbol{h_2}$ dei peli liberi che tale fluido raggiunge in due colonne manometriche separate da una distanza $\boldsymbol{L}$, si determinino:

- il valore della viscosità dinamica μ del fluido;
- il numero di Reynolds basato sulla velocità media;
- la resistenza esercitata dal condotto sul fluido, nel tratto di lunghezza $\boldsymbol{L}$.

Dati:

ρ [kg/m^3] = 900	$\boldsymbol{Q}$ [kg/s] = [1 + 0,01 **C**]
$\boldsymbol{D}$ [mm] = 50	$\boldsymbol{L}$ [mm] = 500
$\boldsymbol{h_1}$ [mm] = 250	$\boldsymbol{h_2}$ [mm] = [100 + **N**]

SOLUZIONE (N = C = 0):

Dalla descrizione, pare si tratti di una tipica corrente di Hagen e Poiseuille, la cui legge di velocità è nota:

$$v_x(r) = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}\left(R^2 - r^2\right)$$

Grazie all'altezza delle due colonne manometriche, si ricava il gradiente di pressione:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\rho g\left(h_2 - h_1\right)}{L}$$

per cui la legge della velocità è

$$v_x(r) = \frac{\rho g\left(h_1 - h_2\right)}{4L\mu}\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right)$$

Per ricavare la viscosità basta ricavare la portata che è nota:

$$\frac{Q}{\rho} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{D}{2}} r v_x dr d\theta = \frac{\pi\rho g\left(h_1 - h_2\right)}{2L\mu}\int_0^{\frac{D}{2}}\left(\frac{D^2}{4}r - r^3\right)dr = \frac{\pi\rho g\left(h_1 - h_2\right)}{2L\mu}\left(\frac{D^4}{16} - \frac{D^4}{32}\right) = \frac{\pi\rho g\left(h_1 - h_2\right)}{L\mu}\frac{D^4}{64}$$

da cui:

$$\mu = \frac{\pi\rho^2 g\left(h_1 - h_2\right)}{LQ}\frac{D^4}{64} \cong 0{,}37 \text{ Pa s}$$

Ora si può calcolare la velocità media:

$$V_m = \frac{4Q}{\pi D^2 \rho} \cong 0{,}57 \text{ m/s}$$

e il numero di Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho D V_m}{\mu} \cong 69{,}3$$

che assicura la validità della soluzione di Hagen e Poiseulle.
Per calcolare la forza esercitata dal condotto sul fluido, è sufficiente fare un bilancio di forze:

$$F-\frac{\pi D^2}{4}\frac{dp}{dx}L=0\Rightarrow F=-\frac{\pi D^2\rho g\left(h_1-h_2\right)}{4}\cong 2{,}60\ \mathrm{N}$$

Esercizio 9

Data una corrente d'aria in condizioni standard, avente velocità e lunghezza caratteristiche ***V*** ed ***L***, si determini l'entità delle forze viscose $\boldsymbol{F_v}$ e delle forze d'inerzia $\boldsymbol{F_i}$ caratteristiche.

Dati:

V [m/s] = [100 + **N**]　　　　***L*** [m] = [0,1 **C]**

SOLUZIONE (N = C = 1):

Essendo:

$$F_i = ma$$

da pure considerazioni dimensionali si ricava:

$$F_i = ma = L^3 \rho \frac{V}{t} = L^2 \rho V^2 \cong 125 \text{ N}$$

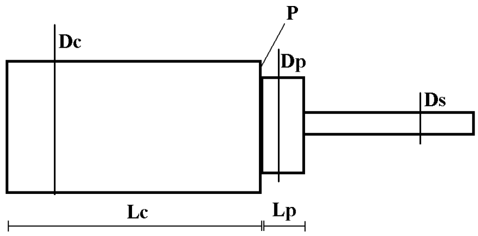
Analogamente:

$$F_v = \mu \frac{V}{L} L^2 = \mu V L \cong 1{,}80 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

Si può verificare che:

$$\frac{F_i}{F_v} = \frac{L^2 \rho V^2}{\mu V L} = \frac{\rho L V}{\mu} = \text{Re}$$

Esercizio 10



Un pistone ha diametro D_p, spessore L_p e stelo di diametro D_s. Il pistone entra in un cilindro chiuso di diametro D_c e ne compre tutta la lunghezza L_c a velocità costante V_p. La posizione iniziale della faccia anteriore del pistone è quella rappresentata in figura.
Nell'ipotesi di fluido incomprimibile, si determini l'andamento temporale della velocità media del fluido nella sezione trasversale solidale con il cilindro denotata con P, per tutta la durata della corsa del pistone.

Dati:

D_c [m] = [100 + **C**] 10^{-3}	D_p [m] = [90 + **C**] 10^{-3}	D_s [m] = 0,5 D_p
L_c [m] = 5	L_p [m] = 0,5	V_p [m/s] = 0,1 **N**

SOLUZIONE (N = C = 1):

La velocità di uscita del fluido avrà due diversi valori a seconda dell'istante di tempo; sia t_1 il momento in cui anche lo stelo del pistone comincia ad entrare nel cilindro:

$$t_1 = \frac{L_p}{V_p} = 5\ \text{s}$$

sia t_2 il momento in cui la corsa del pistone termina:

$$t_2 = \frac{L_c}{V_p} = 50\ \text{s}$$

per la conservazione della massa, nel primo intervallo di tempo vale che:

$$V_p \pi \frac{D_p^2}{4} = V_1 \pi \frac{D_c^2 - D_p^2}{4}$$

da cui:

$$V_1 = V_p \frac{D_p^2}{D_c^2 - D_p^2} \cong 0{,}43\ \text{m/s}$$

nel secondo intervallo di tempo invece:

$$V_p \pi \frac{D_s^2}{4} = V_2 \pi \frac{D_c^2 - D_s^2}{4}$$

da cui:

$$V_2 = V_p \frac{D_s^2}{D_c^2 - D_s^2} \cong 0{,}025\ \text{m/s}$$

pertanto, ricapitolando:

$$\begin{cases} 0 < t < 5\ \text{s}: \ V = 0{,}43\ \text{m/s} \\ 5\ \text{s} < t < 50\ \text{s}: \ V = 0{,}025\ \text{m/s} \end{cases}$$

Esercizio 11

Un aeromobile è in volo stazionario con velocità $\boldsymbol{V_v}$ nell'alta atmosfere, in condizioni di densità $\boldsymbol{\rho_v}$ e temperatura $\boldsymbol{T_v}$ assegnate:

$\boldsymbol{V_v}$ [m/s] = [250 + **N** + **C**] $\boldsymbol{\rho_v}$ [kg/m^3] = [0.414 + 0,01 **N**] $\boldsymbol{T_v}$ [°C] = - [50 + 0,3 **C**]

Si determinino la velocità $\boldsymbol{V_m}$, la densità $\boldsymbol{\rho_m}$ e la pressione $\boldsymbol{p_m}$ dell'aria da utilizzare in una galleria del vento che operi alla temperatura di 15 °C, per ottenere la similitudine dinamica corretta, con un modello in scala geometrica ridotta $\lambda = 0{,}2$.
Si consideri μ dipendente dalla sola temperatura secondo la legge di Sutherland.

SOLUZIONE (N = C = 0):

La similitudine dinamica corretta si ottiene uguagliando i numeri di Reynolds e i numeri di Mach:

$$\begin{cases} \dfrac{L_v \rho_v V_v}{\mu_v} = \dfrac{L_m \rho_m V_m}{\mu_m} \\ \dfrac{V_v}{c_v} = \dfrac{V_m}{c_m} \end{cases}$$

dall'uguaglianza dei numeri di Mach, essendo nota la dipendenza della celerità del suono con la temperatura:

$$\frac{V_m}{V_v} = \frac{c_m}{c_v} = \sqrt{\frac{T_m}{T_v}} \cong 1{,}136$$

(temperature in kelvin) da cui:

$$V_m \cong 284 \text{ m/s}$$

Per sistemare il numero di Reynolds, ricaviamo la relazione fra le viscosità dinamiche:

$$\mu_m = \mu_v \left(\frac{T_m}{T_v}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_v + 110\text{ K}}{T_m + 110\text{ K}} \cong 1{,}228\mu_v$$

e pertanto:

$$\frac{L_v \rho_v V_v}{\mu_v} = \frac{L_m \rho_m V_m}{\mu_m} \Rightarrow \rho_m = \frac{L_v \rho_v V_v \mu_m}{L_m V_m \mu_v} = \frac{L_v}{L_m}\frac{V_v}{V_m}\frac{\mu_m}{\mu_v}\rho_v \cong 2{,}24 \text{ kg/m}^3$$

dall'equazione di stato per l'aria si ricava la pressione:

$$p = \rho R T \cong 184891 \text{ Pa} \cong 1{,}83 \text{ atm}$$

Esercizio 12

Dell'acqua in condizioni standard fluisce in regime laminare da un serbatoio in cui sono mantenuti costanti il livello ***h*** del pelo libero, nonché il valore della sovrapressione ***P*** (rispetto alla pressione atmosferica) agente su di esso. Il deflusso dell'acqua avviene in atmosfera standard, attraverso un condotto orizzontale di lunghezza ***L*** e sezione circolare di diametro ***d***.

Dati:

h [m] = [3 + 0,1 **C**] ***P*** [Pa] = [600 + N]
L [m] = [5 + **N**] ***d*** [m] = 0,002

trascurando gli effetti di imbocco e di sbocco del condotto orizzontale, si determinino:

- il tempo ***t*** necessario per far defluire una massa d'acqua ***M*** [kg] = [5 + 0,1 **N**]
- il numero di Reynolds basato sulla velocità media della corrente

SOLUZIONE (N = C = 0):

Si può immaginare che la corrente nel tubo sia del tipo di Hagen e Poiseulle, pertanto con coefficiente di perdita di carico noto:

$$\xi = \frac{64}{\mathrm{Re}}\frac{L}{d} = \frac{64\mu L}{d^2 V_m \rho}$$

da cui (ponendo un coefficiente di sbocco pari ad 1):

$$P + \rho g h = \frac{1}{2}\frac{64\mu L}{d^2 V_m \rho}\rho V_m^2 + \frac{1}{2}\rho V_m^2 = \frac{32\mu L}{d^2}V_m + \frac{1}{2}\rho V_m^2$$

$$\frac{1}{2}\rho V_m^2 + \frac{32\mu L}{d^2}V_m - P - \rho g h = 0$$

si tratta di un'equazione di secondo grado; ma l'unica radice positiva dà:

$$V_m = 0{,}653 \text{ m/s}$$

$$Q_m = 2{,}05 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s}$$

$$t = \frac{M}{Q_m} \cong 40' \, 37''$$

infine:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho d V_m}{\mu} \cong 1145{,}6$$

che conferma l'ipotesi sulla natura della corrente.

Esercizio 13

Di un vortice piano, stazionario e assialsimmetrico sono assegnati i raggi di curvatura $\boldsymbol{r_i}$ e $\boldsymbol{r_e}$ di due linee di flusso circolari che delimitano una corona in cui circola una portata in massa $\boldsymbol{Q}$ (per unità di altezza) di un fluido non viscoso avente densità costante ρ = 1000 [kg/m^3].

Dati:

$\boldsymbol{r_i}$ [m] = [0,2 **N**] $\boldsymbol{r_e}$ [m] = [$\boldsymbol{r_i}$ + 0,1 + 0,2 **C**] $\boldsymbol{Q}$ [kg/(s m)] = [100 + **N** + **C**]

Nell'ipotesi di moto irrotazionale, si determinino le differenze fra le pressioni statiche e totali tra le due linee di flusso.

SOLUZIONE (N = C = 1):

L'irrotazionalità del moto comporta che la legge di velocità (che ha solo componente tangenziale) all'interno del vortice sia del tipo:

$$V(r) = \frac{a}{r}$$

La portata in volume è uguale all'integrale della velocità tangenziale lungo un raggio da $\boldsymbol{r_i}$ a $\boldsymbol{r_e}$:

$$\frac{Q}{\rho} = \int_{r_i}^{r_e} a \frac{1}{r} dr = \left[a \ln(r)\right]_{r_{ii}}^{r_e} = a \ln \frac{r_e}{r_i}$$

da cui si ricava il valore della costante:

$$a = \frac{Q}{\rho \ln \frac{r_e}{r_i}}$$

Il teorema di Bernoulli vale nella sua forma più generale per l'ipotesi fatta. Pertanto la pressione totale è la stessa in ogni punto; la differenza fra le pressioni totali delle due linee di flusso è 0.
La differenza fra le pressioni statiche si ricava con il teorema di Bernoulli:

$$p_{se} - p_{si} = p_{tot} - \frac{1}{2}\rho V_e^2 - p_{tot} + \frac{1}{2}\rho V_i^2 = \frac{1}{2}\rho\left(V_i^2 - V_e^2\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\rho \ln^2 \frac{r_e}{r_i}}\left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_e^2}\right) \cong 130{,}1\,\text{Pa}$$

E' corretto il fatto che all'interno la pressione statica sia inferiore.

Esercizio 14

Tra due dischi paralleli è immessa una portata di aria ***Q***. Sapendo che il raggio dei dischi è ***R***, che sono separati da una distanza ***h*** e che all'esterno la pressione è quella atmosferica in condizioni standard, calcolare:

- la velocità media dell'aria all'uscita dai dischi;
- la differenza di pressione che agisce in ***R*** ed ***R***/2.

Si supponga che la viscosità sia nulla.

Dati:

Q [m³/s] = (40 + **N**) 10^{-3}
R [mm] = 70 + [2(**N** + **C**)]
h [mm] = ***R***/(35 + **C**)

SOLUZIONE (N = C = 0):

Per il calcolo della velocità media in un punto tra i dischi, ci si può avvalere dell'equazione di continuità, che asserisce la conservazione della portata. Pertanto:

- in r = ***R*** $\quad Q = V_R\, 2\pi rh \;\Rightarrow\; V_R = \dfrac{Q}{2\pi Rh} = 45{,}47 \text{ m/s}$

(che è già la risposta al primo quesito)

- in r = ***R***/2 $\quad Q = V_{R/2}\, 2\pi rh \;\Rightarrow V_{R/2} = \dfrac{Q}{2\pi \frac{R}{2} h} = \dfrac{Q}{\pi Rh} = 90{,}94 \text{ m/s}$

dove il calcolo di questa velocità serve per il secondo quesito. Si osservi, qualora fosse sfuggito, che il suo valore è esattamente il doppio del precedente, come prevedibile.

Per calcolare il salto di pressione richiesto e si sfrutta l'ipotesi di assenza di viscosità, condizione sufficiente per l'applicabilità del teorema di Bernoulli. Vale dunque:

$$p_{tot_R} = p_{tot_{R/2}} = \text{cost}$$

e quindi esplicitando la pressione totale nel caso incomprimibile:

$$p_R + \frac{1}{2}\rho V_R^{\,2} = p_{R/2} + \frac{1}{2}\rho V_{R/2}^{\,2}$$

$$p_R - p_{R/2} = \Delta p = \frac{1}{2}\rho(V_{R/2}^{\,2} - V_R^{\,2})$$

$$\Delta p = 3799{,}07 \text{ Pa}$$

Esercizio 15

Si consideri un vortice di Rankine con raggio del nucleo ***R*** e circolazione ***C*** dati.

Si calcolino:
a) la circolazione su di una circonferenza a distanza R/2 dal centro
b) la vorticità a R/2 dal centro
c) la velocità angolare a R/2 dal centro
d) la velocità tangenziale a R dal centro
e) la velocità radiale a 2R dal centro
f) la vorticità a 2R dal centro
g) il gradiente di pressione totale a 2R dal centro
h) il gradiente di pressione a 2R dal centro

SOLUZIONE:

a)
La vorticità nel nucleo del vortice di Rankine è costante. Ricordando che la circolazione è l'integrale della vorticità, ***C*** sarà ottenuta integrando su tutto il nucleo, mentre se si integra su un cerchio di raggio ***R***/2 si prende solo un quarto della superficie totale. Per cui:

$$C\big|_{r=\frac{R}{2}} = \frac{C}{4}$$

b)
La vorticità a ***R***/2 sarà il valore che è costante su tutto il nucleo. Pertanto sarà possibile ottenerla dividendo la circolazione ***C*** per l'area del cerchio di raggio i ***R***:

$$\omega\big|_{r=\frac{R}{2}} = \frac{C}{\pi R^2}$$

c)
La velocità angolare è ½ della vorticità. Pertanto:

$$\Omega\big|_{r=\frac{R}{2}} = \frac{C}{2\pi R^2}$$

d)
La circolazione è anche l'integrale di linea della velocità. Pertanto basta dividere il valore della circolazione per la lunghezza della circonferenza di raggio ***R***:

$$v_\theta\big|_{r=R} = \frac{C}{2\pi R}$$

e)
La velocità radiale è ovunque nulla in un vortice di Rankine:

$$v_r\big|_{r=2R} = 0$$

f)
La vorticità è nulla fuori dal nucleo, per cui:

$$\omega\big|_{r=2R} = 0$$

g)
La pressione totale non ha gradiente fuori dal nucleo dove il moto è irrotazionale. Per cui:

$$\vec{\nabla} p_T\Big|_{r=2R} = \vec{0}$$

h)
Per valutare il gradiente di pressione (che avrà direzione radiale) si può usare il teorema di Bernoulli data l'irrotazionalità del moto al di fuori del nucleo. Ricordando la legge di velocità del vortice per $r > \boldsymbol{R}$:

$$v_\theta = \frac{\text{costante}}{r}$$

è immediato ricavare la costante perché si conosce già la velocità al confine del nucleo (punto d); per cui si avrà:

$$v_\theta = \frac{C}{2\pi r}$$

Scrivendo il teorema di Bernoulli (ricordando che la velocità non ha componente radiale) e derivando si ha:

$$\frac{1}{2}\rho v_\theta^2 + p = \text{costante} \Rightarrow \frac{C^2\rho}{8\pi^2 r^2} + p = \text{costante}$$

$$-\frac{C^2\rho}{4\pi^2 r^3} + \frac{dp}{dr} = 0$$

per cui:

$$\vec{\nabla} p\Big|_{r=2R} = \frac{C^2\rho}{32\pi^2 R^3}\hat{r}$$

dove $\hat{r}$ rappresenta il versore radiale.