



Politecnico di Milano
Corso di Servosistemi Aerospaziali
Anno Accademico 2003/2004

Paolo Massioni - 642354

**SISTEMA DI CONTROLLO
PER IL PENDOLO INVERSO**

disponibile in rete all'indirizzo <http://pmassio.altervista.org>

1 Il sistema fisico

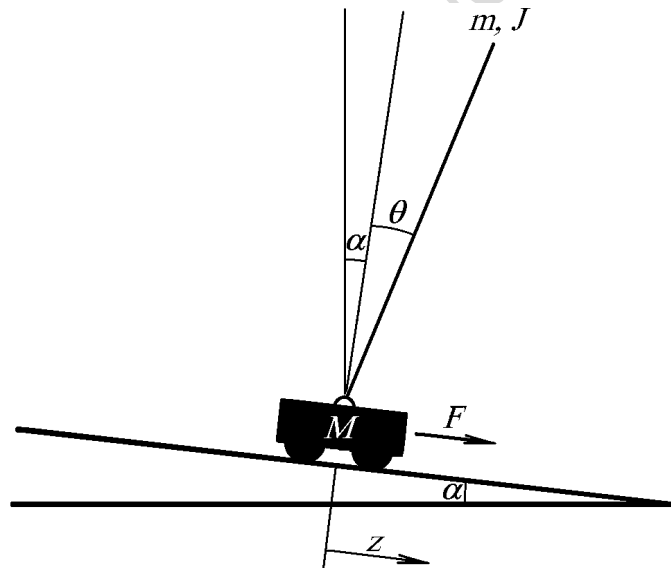
1.1 Le specifiche assegnate

Si richiede di progettare e implementare con Simulink il sistema di controllo per l'esperimento del pendolo inverso della Quanser Consulting, con:

- nessuna massa aggiunta,
- slitta inclinata di 5 gradi,
- controllo LQR,
- osservatore ridotto,
- inseguimento di un comando armonico del carrello di ampiezza 20 cm con errore dell'1%.

1.2 Le equazioni del sistema fisico

L'oggetto dello studio è un sistema meccanico con due gradi di libertà, z e θ .



θ rappresenta la rotazione dell'asta, misurata positivamente in senso orario a partire dalla direzione normale alla direzione della slitta, mentre z è la coordinata lineare che misura la distanza del carrello lungo la slitta rispetto ad un punto di riferimento. L'ingresso al sistema è la forza F che viene applicata al carrello nella direzione positiva di z ; tale forza viene esercitata tramite un motore elettrico.

I parametri del problema sono riassunti nella tabella che segue:

α	inclinazione dell'asta	5°
M	massa del carrello	0,455 kg
m	massa dell'asta	0,210 kg
L	lunghezza dell'asta	0,65 m
J	momento d'inerzia dell'asta ($J = ml^2/3$)	0,0065 kg m ²
g	accelerazione di gravità	9,81 m/s ²

Per poter progettare il sistema di controllo, è necessario conoscere le equazioni della dinamica del sistema; tali equazioni possono essere ricavate tramite il metodo di Lagrange. Si procede quindi alla scrittura dell'espressione dell'energia potenziale V e dell'energia cinetica T del sistema:

$$V = -zMg \sin \alpha - mg(z \sin \alpha + l \cos(\theta + \alpha)) = -zMg \sin \alpha - mgz \sin \alpha + mgl \cos(\theta + \alpha) = -z(M + m)g \sin \alpha + mgl \cos(\theta + \alpha)$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 + 2l \dot{\theta} \dot{z} \cos \theta) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

dove l rappresenta la metà della lunghezza dell'asta (cioè la distanza fra la cerniera e il baricentro dell'asta stessa).

Per ottenere le equazioni della dinamica si sfrutta la formula di Lagrange per entrambi i gradi di libertà:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} + ml \dot{z} \cos \theta - ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + J \ddot{\theta} + l \dot{\theta} \sin \theta - mgl \sin(\theta + \alpha) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial z} = F - c \dot{z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M + m) \ddot{z} + lm \ddot{\theta} \cos \theta - lm \dot{\theta}^2 \sin \theta - (M + m)g \sin \alpha = F - c \dot{z}$$

dove c è un coefficiente di attrito che verrà determinato più avanti.

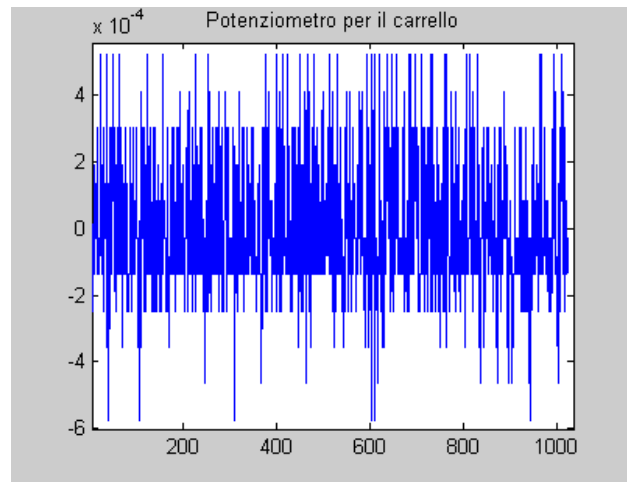
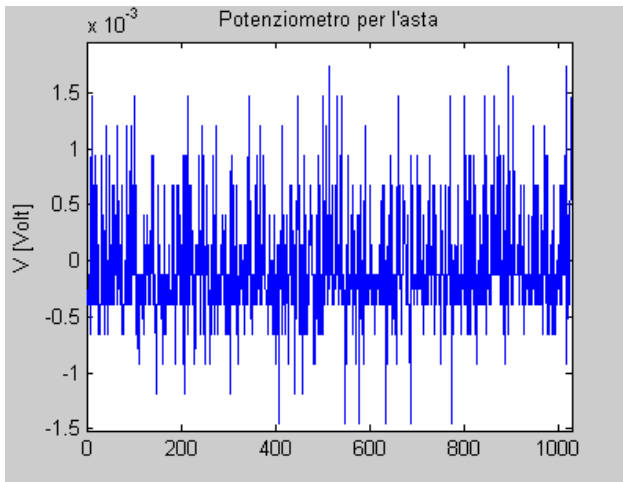
Dalle due equazioni ottenute è possibile ottenere un modello agli stati del sistema, dove gli stati sono quattro e sono costituiti dalle coordinate libere e dalle loro derivate temporali prime, alle quali viene assegnato un proprio simbolo per maggiore chiarezza della notazione:

$$\begin{cases} (ml^2 + J)\dot{\omega} + ml\dot{v} \cos \theta - mlv\omega^2 \sin \theta + l\omega \sin \theta - mgl \sin(\theta + \alpha) = 0 \\ (M + m)\dot{v} + lm\dot{\omega} \cos \theta - lm\omega^2 \sin \theta - (M + m)g \sin \alpha + cv = F \\ v = \dot{z} \\ \omega = \dot{\theta} \end{cases}$$

Queste equazioni però non sono ancora quelle utili ai fini del progetto del controllore, in quanto sono non lineari. Occorre quindi linearizzare le equazioni rispetto ad una condizione di equilibrio, e si scopre facilmente che tale condizione si realizza per:

$$\begin{cases} \theta_0 = -\alpha \\ F_0 = (M + m)g \sin \alpha \\ v_0 = 0 \\ \omega_0 = 0 \\ z \text{ qualunque} \end{cases}$$

Si definisce quindi la coordinata θ' come la differenza tra θ e il valore di equilibrio θ_0 , e l'ingresso F' come la differenza fra F e il valore di equilibrio F_0 . Sostituendo nelle equazioni si ottiene:



Una trasformata di Fourier (eseguita tramite il comando Matlab FFT) permette di mettere in evidenza che tale disturbo ha circa la stessa intensità a tutte le frequenze: può essere quindi considerato un rumore bianco. La deviazione standard dell'uscita è pari a 0,000500 V per il sensore angolare e 0,000221 V per il sensore di posizione del carrello.

1.4 Il motore elettrico

La forza F è applicata tramite un motore elettrico comandato in tensione che esercita una coppia su di una ruota dentata che ingrana sulla slitta. I parametri del motore sono:

k_m	costante di coppia del motore	0,00767 Nm/A
k_e	costante di f.e.m. inversa	0,00767 V/(rad/s)
R	resistenza dell'armatura	2,6 Ω
L_m	induttanza dell'armatura	0,18 mH
J_m	momento d'inerzia dell'armatura	$3,87 \cdot 10^{-7}$ kg m ²
r	raggio della ruota dentata del motore	0,635 cm
τ	rapporto di trasmissione	3,7

Le equazioni della dinamica del motore elettrico sono:

$$\begin{cases} V = L_m \frac{dI}{dt} + RI + k_e \omega_m \\ k_t I = J_m \dot{\omega}_m + M_m \end{cases}$$

dove V è il comando in tensione, I è la corrente, ω_m è la velocità di rotazione del motore e M_m la coppia esercitata sul rotore del motore.

La prima delle due equazioni rappresenta la dinamica del transitorio del motore legato ai fenomeni elettrici; in genere tale dinamica è molto veloce e può essere trascurata ipotizzando che la corrente sia sempre a regime, cioè:

$$\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow I = \frac{V}{R} - \frac{k_e \omega_m}{R}$$

sostituendo nella seconda equazione e trascurando il termine $J_m \dot{\omega}_m$ si ricava:

$$M_m = k_t \frac{V}{R} - \frac{k_t k_e \omega_m}{R}$$

Tenendo conto del rapporto di trasmissione è possibile ottenere la coppia esercitata dalla ruota dentata:

$$M_r = \tau M_m$$

Tale coppia si traduce nella forza sul carrello tramite la relazione:

$$F = \frac{M_r}{r}$$

In ultimo si può anche considerare il legame tra la velocità di rotazione del motore e la velocità di traslazione del carrello:

$$\omega_m = \omega_r \tau = \frac{\tau}{r} \dot{z}$$

Si ottiene quindi:

$$F = \frac{\tau k_t}{rR} V - \frac{\tau^2 k_t k_e}{r^2 R} \dot{z}$$

La forza viene quindi ad essere costituita da due termini, uno controllato tramite l'ingresso V e uno "di attrito" proporzionale alla velocità del carrello. Il primo termine permette di trovare il legame fra la forza espressa in newton e il comando in volt, in particolare si ottiene:

$$\frac{F}{V} = 1,719 \frac{\text{N}}{\text{V}}$$

Il secondo termine, che ammonta a 7,68 N/(m/s), contribuisce a determinare il coefficiente di attrito c che compare nelle equazioni della dinamica del sistema.

1.5 Calibrazione dell'attrito

All'attrito dovuto al motore si aggiunge l'attrito dovuto allo scorrimento del carrello sulla slitta. Tale attrito può essere determinato considerando una versione semplificata del problema, in cui l'asta sia fissa (può essere lasciata pendente da un lato o meglio staccata e appoggiata sopra il carrello). La dinamica del moto della carrello è descritta dall'equazione:

$$(M + m)\ddot{z} + c\dot{z} = F$$

dove il coefficiente c può essere visto come dovuto in parte al motore e in parte all'ingranaggio:

$$c = c_{ing} + \frac{\tau^2 k_t k_e}{r^2 R}$$

Si può determinare il coefficiente c nella sua interezza con una prova sperimentale molto semplice, che consiste nell'esaminare la risposta del carrello con l'asta fissa a un comando costante; il carrello raggiunge una velocità di regime dalla quale è possibile ricavare c :

$$c = \frac{F}{\dot{z}_{regime}}$$

Sono state eseguite due diverse prove sperimentali, esaminando le risposte a forzanti costante di 2 e 4 N, che hanno dato come risultato rispettivamente 25,4 e 14,0 N/(m/s). Potrebbe sembrare che la scelta migliore sia quella di prendere il valore massimo, ma ciò potrebbe rendere il sistema di controllo meno stabile: infatti, se in controllore "credesse" di doversi opporre a un attrito maggiore di quello reale, ciò contribuirebbe a diminuire lo smorzamento del sistema. Si è deciso quindi di assumere come c un valore intermedio pari a 20 N/(m/s).

2 Il progetto del controllore

2.1 Il sistema non controllato

La matrice A caratteristica del sistema ha come autovalori:

0
-35,89
4,36
-5,10

L'autovalore positivo segnala che il sistema è intrinsecamente instabile, mentre l'autovalore nullo è relativo alla possibilità di avere una posizione di equilibrio per qualunque valore di z .

2.2 Osservatore ridotto

I sensori danno come uscita le posizioni del carrello e dell'asta, ma non danno le velocità, il che significa che si hanno le misure di solo due dei quattro stati. Gli altri due stati possono essere osservati con un osservatore ridotto. Si può verificare l'osservabilità del sistema calcolando il rango della matrice:

$$\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & A^{T^2} C^T & A^{T^3} C^T \end{bmatrix} \text{ dove } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (la matrice che seleziona gli stati misurati)}$$

tale rango è pari a 4, il che conferma l'osservabilità del sistema.

Per ottenere l'osservatore è necessario partizionare il modello del sistema separando gli stati misurati da quelli da osservare:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}' \\ \dot{z} \\ \dot{\omega} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta' \\ z \\ \omega \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} F$$

L'osservatore ridotto è un sistema lineare che riceve in ingresso il comando \mathbf{u} e la prima parte dello stato (\mathbf{x}_1) e dà in uscita la seconda parte dello stato ($\mathbf{x}_{2\text{osservato}}$). La dinamica dell'osservatore è regolata dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = F\mathbf{w} + G\mathbf{u} + H\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_{2\text{osservato}} = \mathbf{w} + L\mathbf{x}_1 \end{cases}$$

dove:

$$\begin{aligned} L^T &= \text{place}(A_{22}^T, A_{12}^T, [\omega_1 \ \omega_2]) \\ F &= A_{22} - LA_{12} \\ G &= B_2 - LB_1 \\ H &= A_{21} + FL - LA_{11} \end{aligned}$$

ω_1 e ω_2 sono i poli dell'osservatore, che possono essere posizionati a piacimento cercando un buon compromesso; una maggiore velocità permette di avere un controllo più pronto, ma lascia che l'uscita sia maggiormente influenzata dal disturbo. Ad ogni modo l'osservatore ridotto è un sistema non strettamente proprio, per cui il disturbo sull'ingresso sarà trasmesso inalterato all'uscita tramite la matrice L , e sarà quindi opportuno disporre dei filtri passabasso per tagliare le frequenze più alte.

2.3 Stati aggiunti

Per garantire un buon inseguimento della sinusoide come è richiesto dalle specifiche, occorre aggiungere degli stati al modello. E' necessario inserire uno stato che si comporti come il riferimento da inseguire e un integratore; quest'ultimo è indispensabile per almeno due buoni motivi come verrà spiegato più avanti (paragrafi 3.1 e 3.4).

La dinamica degli stati aggiunti è governata dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{v}_{ins} = -\Omega^2 z_{ins} \\ \dot{z}_{ins} = v_{ins} \\ \dot{i} = z - z_{ins} \end{cases}$$

dove v_{ins} e z_{ins} sono gli stati del riferimento e i è l'integratore che integra l'errore nella posizione. Ω è la pulsazione della sinusoide da inseguire. Il sistema completo così ottenuto è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ml^2 + J & ml \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & lm \cos \alpha & M + m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}' \\ \dot{z} \\ \dot{\omega} \\ \dot{v} \\ \dot{z}_{ins} \\ \dot{v}_{ins} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ mgl & 0 & l \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta' \\ z \\ \omega \\ v \\ z_{ins} \\ v_{ins} \\ i \end{bmatrix} + 1 F' \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cioè, denotando ora con \mathbf{x} il vettore degli stati che include gli stati aggiunti:

$$V' \dot{\mathbf{x}}' = \tilde{A}' \mathbf{x}' + \tilde{B}' \mathbf{u}$$

Lo scopo del sistema di controllo sarà quello di annullare la differenza tra il riferimento e gli stati veri, per cui conviene specificare tali errori, definiti come:

$$\begin{cases} \dot{e}_v = \dot{v} - \dot{v}_{ins} \\ \dot{e}_z = z - z_{ins} \end{cases}$$

Con una trasformazione dello stato si può mettere in evidenza la dinamica degli errori:

$$\begin{bmatrix} \theta' \\ e_z \\ \omega \\ e_v \\ z_{ins} \\ v_{ins} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta' \\ z \\ \omega \\ v \\ z_{ins} \\ v_{ins} \\ i \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x}' = T \mathbf{x}$$

Le matrici che sono utilizzate per il sistema di controllo sono quindi:

$$A' = T^{-1} V'^{-1} \tilde{A}' T$$

$$B' = T^{-1} V'^{-1} \tilde{B}'$$

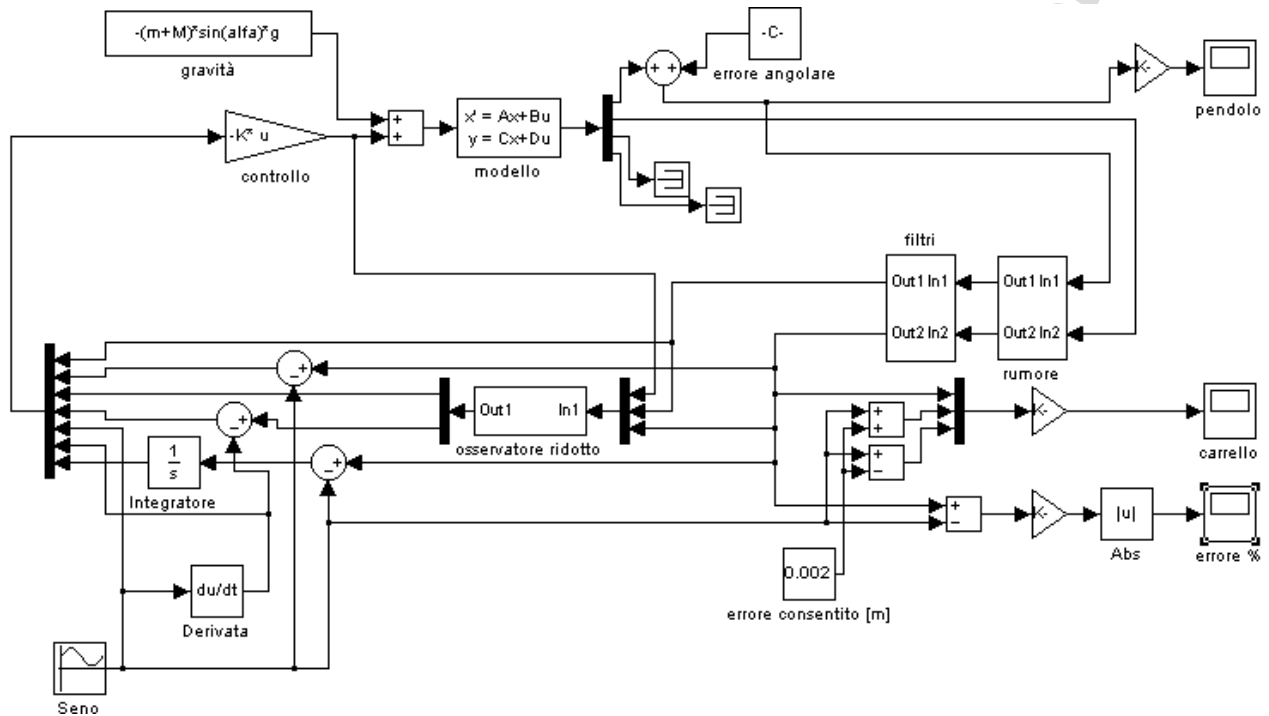
2.4 Controllo LQR

Il controllo LQR è un tipo di controllo proporzionale agli stati; per come il problema è stato impostato, ci sono sette stati e quindi si avranno sette guadagni. Tali guadagni sono ottenibili mediante la funzione LQR di Matlab, alla quale vengono date in ingresso le matrici A' e B' del sistema e le matrici di pesi Q per lo stato e R per l'azione di controllo.

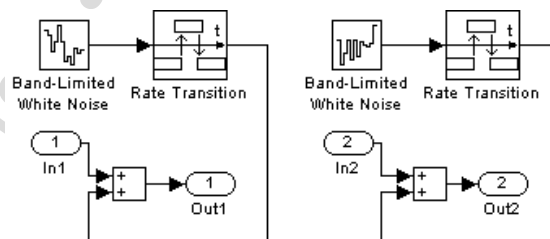
3 Simulazione

3.1 Il simulatore

La simulazione del controllo sul sistema viene implementata tramite Simulink, con il modello mostrato di seguito:

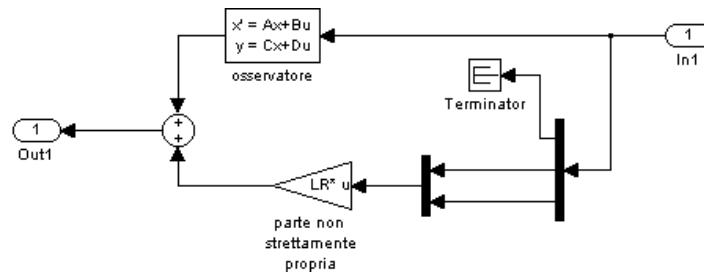


Il blocco “modello” contiene il modello agli stati linearizzato del pendolo inverso, con le matrici A e B calcolate al paragrafo 1.2. Il sistema dà come uscite tutti gli stati ma solo i primi due (θ e z) sono quelli che vengono misurati e quindi gli altri due vengono terminati. Dopodiché alle due misure viene aggiunto il disturbo, che è simulato tramite dei rumori bianchi dotati delle varianze calcolate al punto 1.3, nel sottosistema “rumore”:



Per poter togliere questo rumore, si è disposta una serie di filtri, contenuta nel blocco “filtri”, che contiene un filtro passabasso per ogni segnale.

Il blocco “osservatore ridotto” contiene appunto l’osservatore implementato nel seguente modo:



La parte dinamica dell'osservatore è contenuta nel sistema "osservatore", nel quale però la matrice "D" è stata posta come nulla; la parte dell'uscita direttamente dipendente dall'ingresso viene recuperata con un guadagno matriciale posto esternamente. Questa configurazione è necessaria per evitare che Matlab individui un loop algebrico che coinvolge il comando al sistema: infatti, il comando è proporzionale tramite i guadagni agli stati, e quindi anche agli stati osservati; ma gli stati osservati sono a loro volta dipendenti algebricamente dal comando tramite la matrice "D" dell'osservatore ridotto che è non nulla. In realtà il loop non esiste perché la colonna di D che moltiplica il comando è composta da zeri, ma Matlab non se ne rende conto se non separando i contributi come mostrato nel disegno.

Continuando a descrivere il modello principale, si può vedere all'uscita dell'osservatore una serie di blocchi di differenza che permettono di ricavare gli stati e gli errori rispetto al riferimento sui quali è basato il controllo. Questi vettori poi vengono tramutati in comando tramite il vettore K dei guadagni.

Si può notare che l'effetto della gravità, che rappresenta un disturbo costante che tenderebbe a far cadere il carrello da un lato, viene simulato con un ingresso aggiuntivo al sistema del pendolo. Non è necessario (sia nella simulazione, sia nella realtà) bilanciare questo ingresso con un ingresso opposto data la presenza dell'integratore nel sistema di controllo.

Il blocco "errore angolare", che contiene una costante, permette di simulare l'effetto che si avrebbe nel caso in cui il pendolo venga rilasciato inizialmente in posizione non esattamente verticale; dato che il controllore assume come riferimento proprio la posizione iniziale, è come se lo "zero" della posizione dell'asta non fosse più una posizione di equilibrio. Si può verificare con la simulazione che questo errore iniziale non è problematico e viene risolto dalla parte integrale del controllo (par. 3.4).

3.2 Parametri del simulatore

Viene eseguita una simulazione con il modello mostrato al paragrafo precedente. I parametri della simulazione sono:

passo di integrazione	0,001 s
poli dell'osservatore ridotto (ω_1 e ω_2)	- 40 Hz; - 45 Hz
polo dei filtri passabasso (nel blocco "filtri")	- 90 Hz
Periodo della sinusoide	12 s

pesi dell'LQR	$Q = \begin{bmatrix} \frac{59000}{\text{rad}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3000}{\text{m}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{90000}{(\text{ms})^2} \end{bmatrix}$
	$R = \begin{bmatrix} 5 \\ V^2 \end{bmatrix}$

I pesi per l'LQR sono stati scelti sulla base del criterio del "massimo valore consentito" e poi affinati mediante prove al simulatore; si è notato che dei grossi pesi alla θ (il primo stato) e all'integratore (il settimo stato) garantiscono un buon inseguimento. Viene dato un peso anche all'errore su z (secondo stato), mentre per gli altri stati, che sono le velocità e i riferimenti, viene assegnato un peso nullo. In particolare la scelta è obbligata per i riferimenti perché non sono controllabili (e comunque non li si vuole controllare!).

Il peso sulla R può essere regolato in modo da mantenere il comando entro limiti accettabili (5 V).

I guadagni così trovati sono:

- 251,05 V/rad per θ
- 147,55 V/m per e_z
- 41,55 V/(rad/s) per ω
- 88,42 V/(m/s) per e_v
- 6,86 V/m per z_{ins}
- 11,66 V/(m/s) per v_{ins}
- 136,08 V/(ms) per i

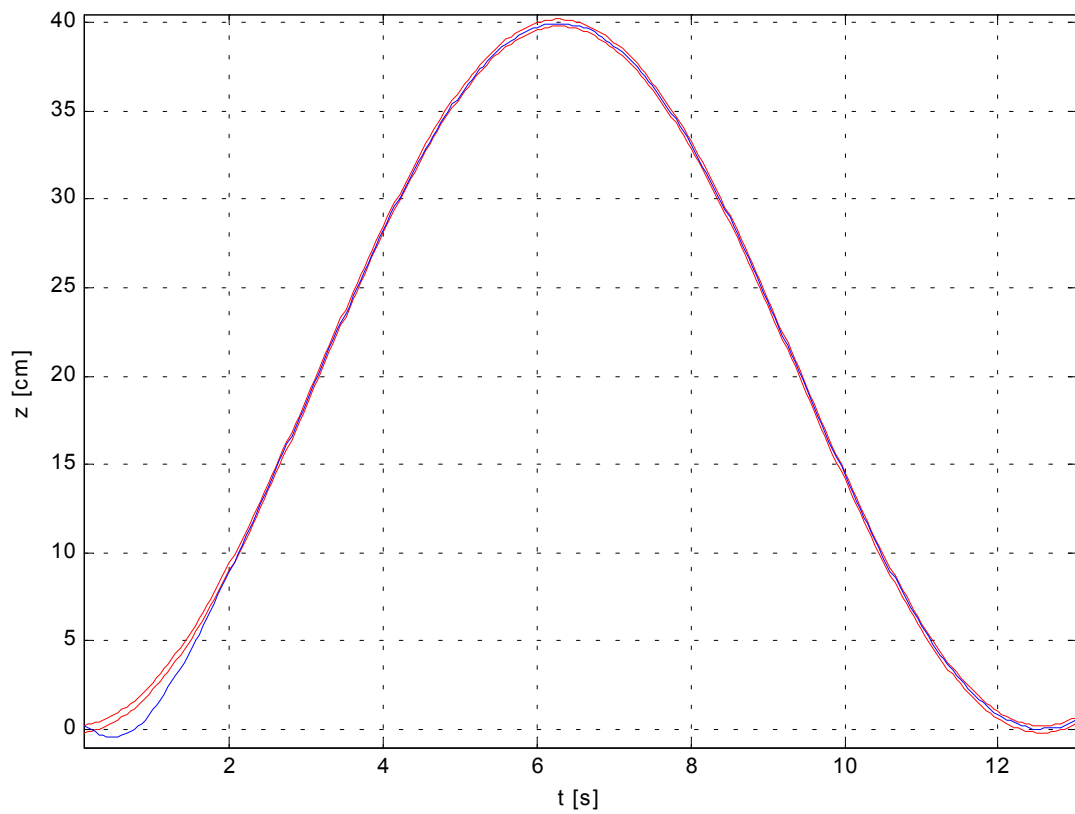
I poli in anello chiuso sono:

- 27,826 + 10.401 i
- 27,826 – 10.401 i
- 1,410 + 1.881 i
- 1,410 – 1.881 i
- 2,132
- + 0,523 i
- 0,523 i

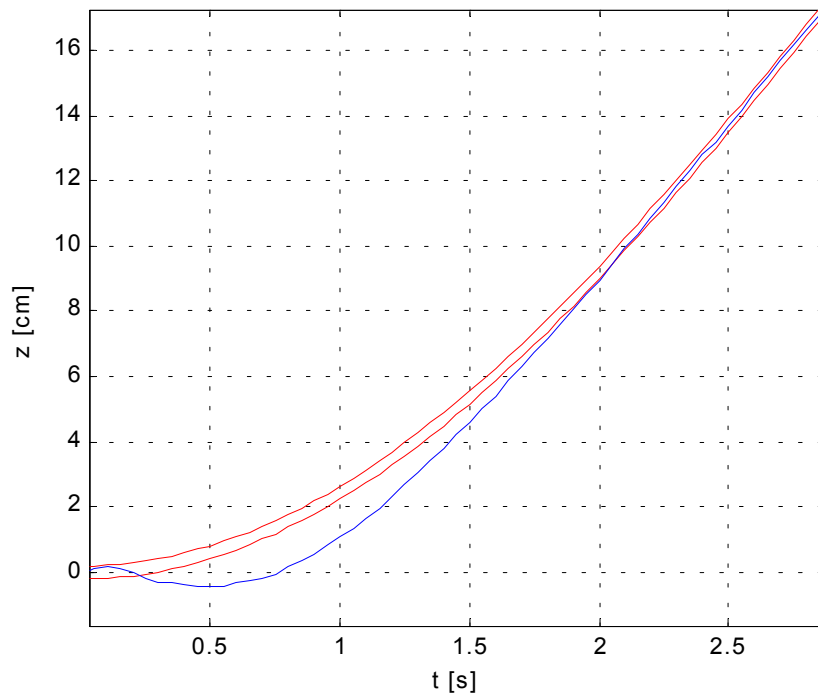
Gli ultimi due poli, semplicemente stabili, sono quelli del riferimento.

3.3 Risultati della simulazione

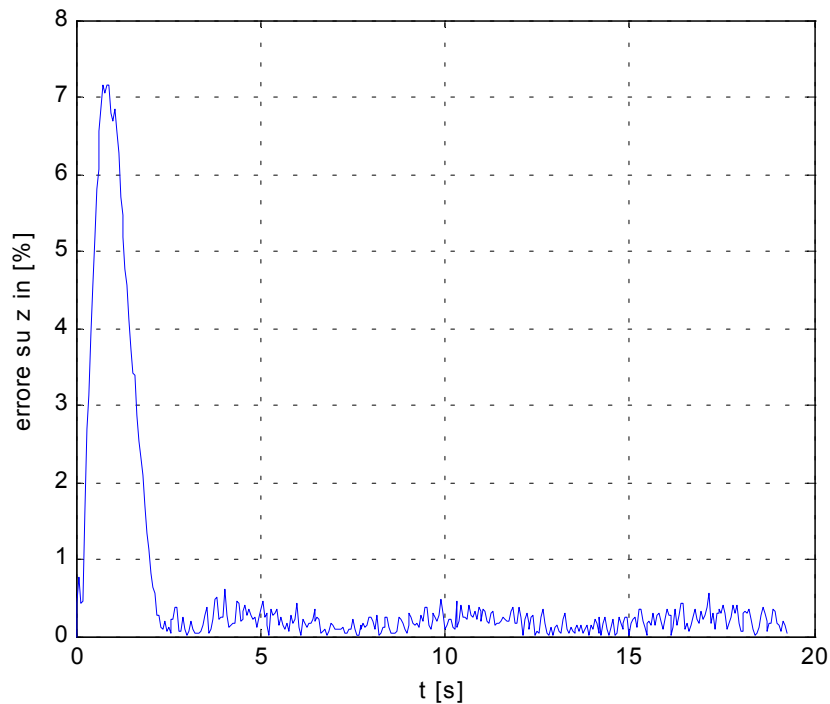
Il seguente grafico mostra l'andamento della posizione del carrello rispetto ai limiti consentiti dalle specifiche (linee rosse):



Un dettaglio mostra meglio il transitorio iniziale:

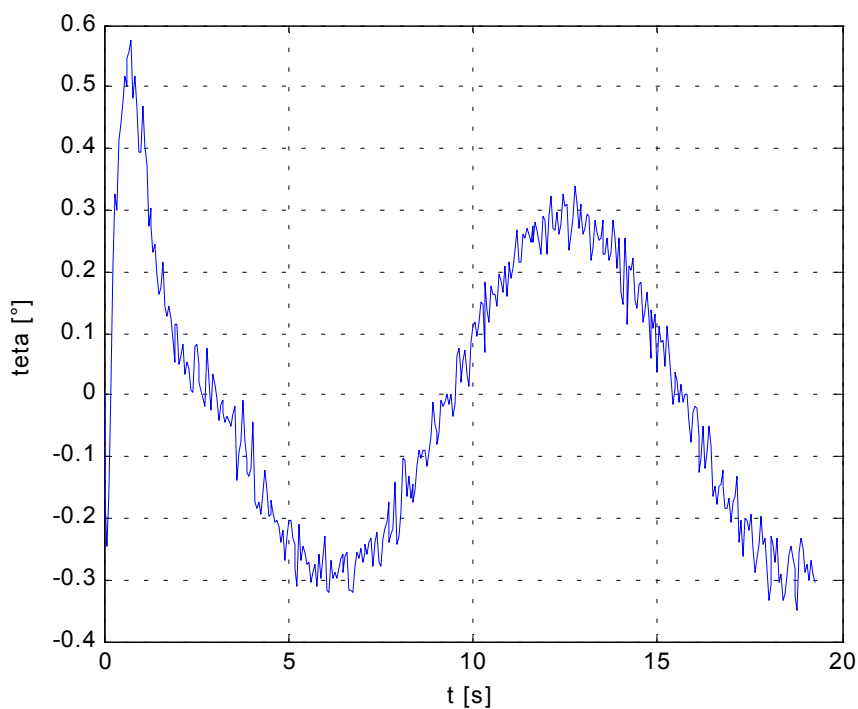


Il seguente grafico mostra l'errore percentuale nel corso del tempo:



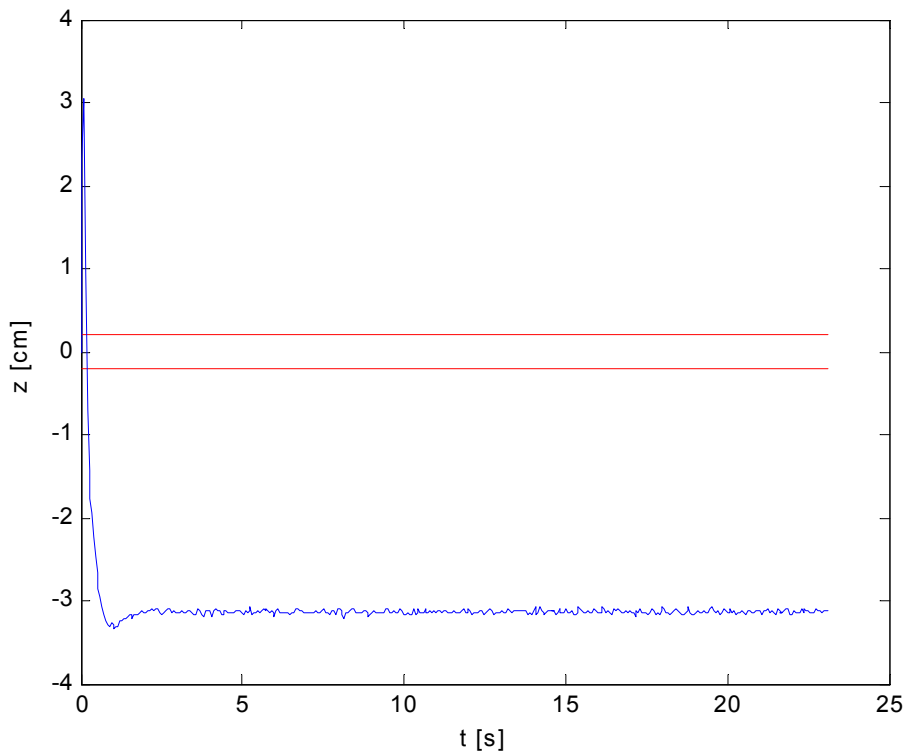
Come si può vedere, la specifica di errore minore dell'1 % è pienamente soddisfatta. Il transitorio è interpretabile come il tempo che impiega l'integratore a "caricarsi" per contrastare il disturbo costante dato dalla gravità.

Da ultimo si può mostrare il grafico con l'andamento della posizione angolare del pendolo:



3.4 Efficacia del controllo integrale

Si può verificare la verità dell'affermazione fatta al paragrafo 3.1, sul fatto che il controllo integrale ovvii ad un riferimento sbagliato per la posizione dell'asta. Si può lanciare la simulazione in una condizione semplificata in cui si ha la slitta orizzontale e il riferimento per z è fisso e posto a 0. Se non c'è controllo integrale, un errore nella posizione iniziale del pendolo (1° in questo caso) porta alla seguente situazione:



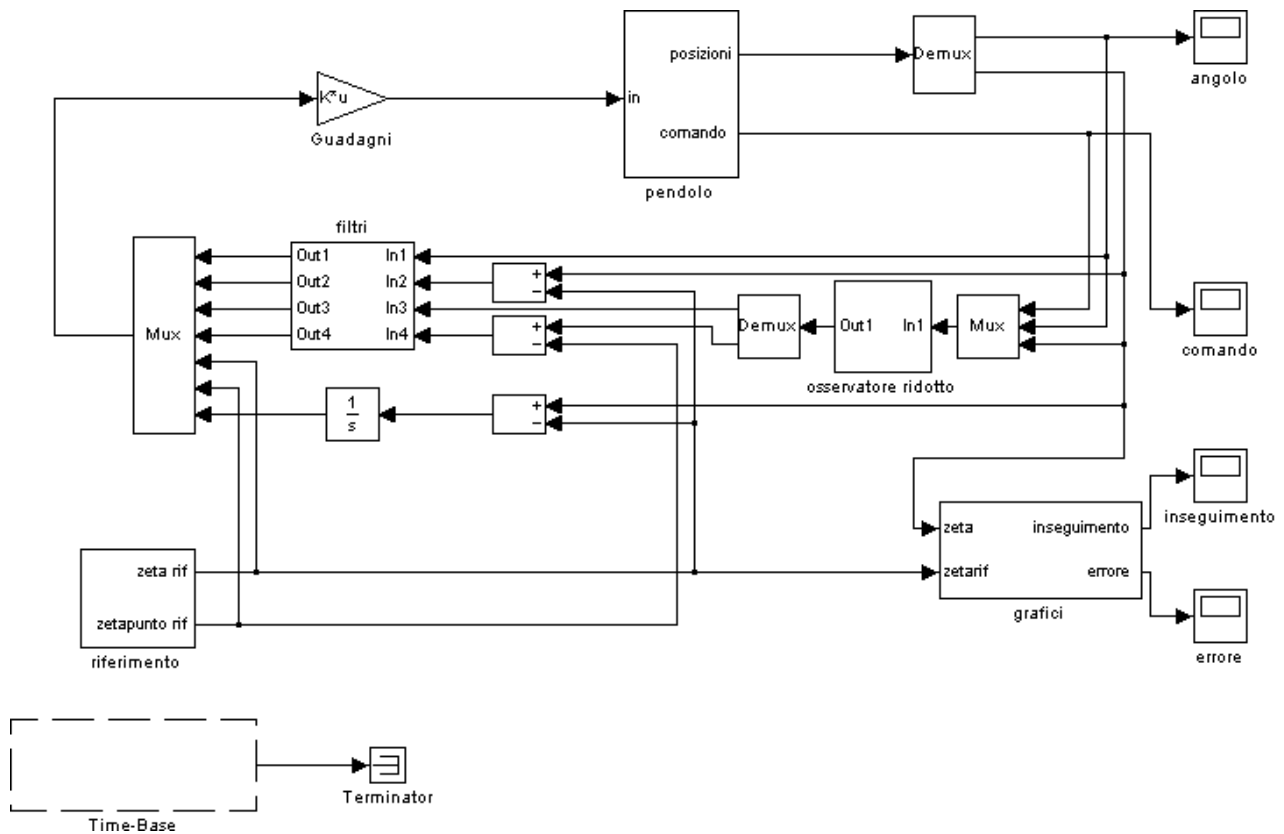
cioè il carrello, dopo un transitorio, si va fermare su una posizione che non coincide con quella desiderata. L'errore sul riferimento infatti genera un comando costante tramite il suo guadagno anche quando il pendolo è in posizione verticale, in quanto il sistema di controllo non percepisce la sua posizione come 0. Questo può esser visto come un disturbo costante generato internamente, che senza un controllo integrale porta ad un errore a regime. Si può verificare sempre con la simulazione che l'inserimento della parte integrale permette al carrello di ritornare in posizione iniziale.

La parte integrale è quindi necessaria per annullare l'effetto della gravità e dell'errore iniziale nel rilascio del pendolo, cosa che nella realtà non è da sottovalutare perché al momento del lancio dell'esperimento il pendolo viene tenuto fermo con le mani. Inoltre si può anche verificare sempre con la simulazione che un buon settaggio dell'integratore migliora le prestazioni dell'inseguimento.

4 L'esperimento in laboratorio

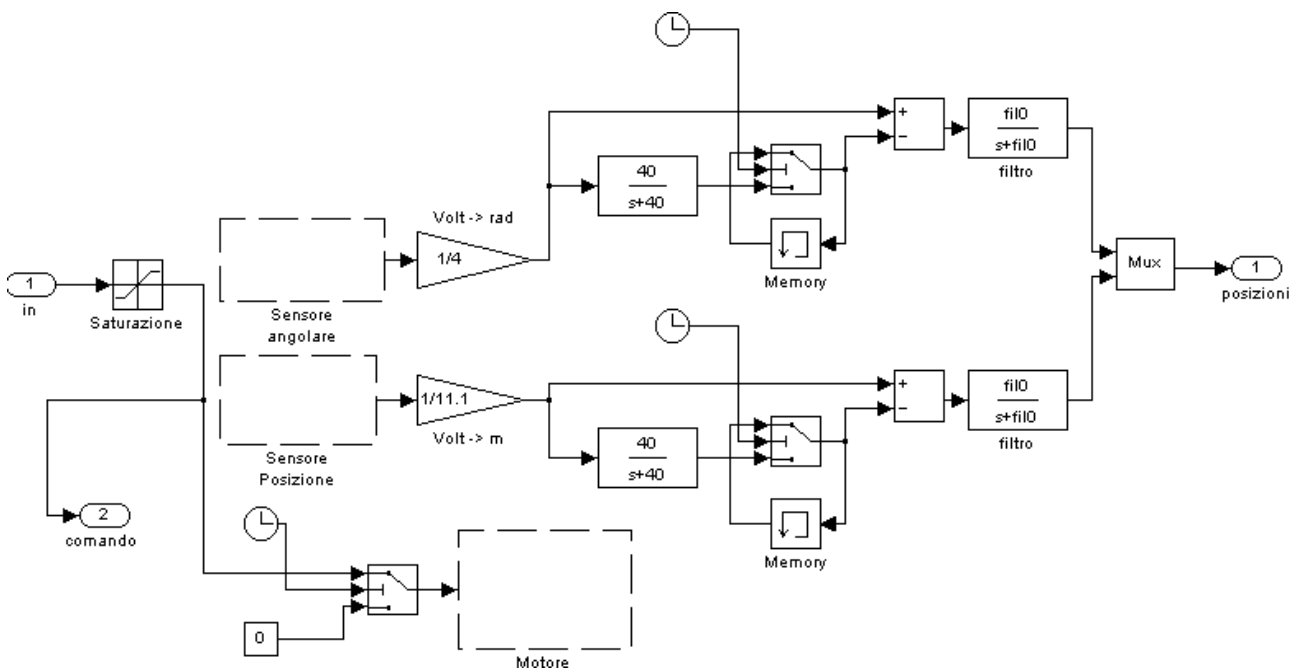
4.1 Il sistema di controllo

Il modello Simulink che permette di controllare il vero pendolo inverso è essenzialmente lo stesso, con alcune piccole varianti:



Le differenze più rilevanti consistono nel fatto che al posto del blocco che simula il comportamento del pendolo c'è l'interfaccia con il pendolo vero (sottosistema "pendolo"); inoltre è stato disposto un numero maggiore di filtri.

Il blocco "pendolo" contiene:



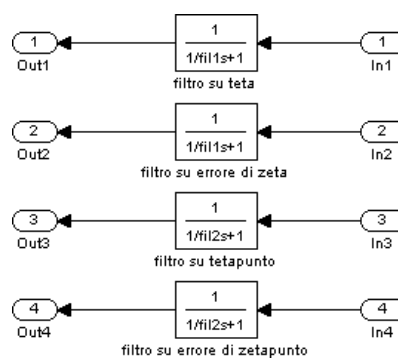
In ingresso ottiene il comando, già espresso in volt, che viene fatto passare per una saturazione che ha lo scopo di tutelare il motore da tensioni troppo alte, e poi esce per andare all'osservatore. Le

uscite dei sensori invece vengono indirizzate in un complicato circuito che coinvolge un blocco di memoria e un interruttore, il cui scopo è quello di eliminare l'offset. Il filtro passabasso serve per impostare l'offset su un valore medio del segnale iniziale, in modo da pulire un po' il rumore. Il modello è fatto in modo tale che il controllo cominci a funzionare soltanto dopo 0,5 s in modo da permettere l'acquisizione del valore iniziale.

Dopo il "filtro anti-offset" c'è un filtro passabasso vero e proprio, il cui scopo è quello di tagliare le frequenze più alte del rumore.

Si noti che le uscite e gli ingressi non sono collegati direttamente, ma attraverso il sistema fisico.

L'altra differenza fra il simulatore e il sistema di controllo vero sta in una seconda serie di filtri posti appena prima del calcolo del comando, posti nel blocco "filtri":



La ragione della presenza di questi ulteriori filtri non può essere capita dalla simulazione. Nel simulatore sono presenti dei filtri a 90 Hz e l'osservatore è piuttosto lento (40 Hz). Nella realtà questa situazione non funziona molto bene, e quello che si è fatto è stato di aumentare leggermente la velocità dell'osservatore (70 Hz) aumentando la banda dei filtri che vi sono a monte (180 Hz): così il controllo è più pronto a reagire a tutti i disturbi di cui non si è tenuto conto in simulazione e che sfuggono al controllo e in parte anche alla comprensione dell'utente.

Inoltre nella realtà è necessario anche evitare il "nervosismo" del motore, che lo porterebbe a produrre un caratteristico suono dovuto all'alta frequenza del comando in ingresso. Per scongiurare questa situazione si è visto che una buona soluzione è proprio quella di porre un altro filtro passabasso a valle dell'osservatore (quelli nel sottosistema "filtri").

4.3 Parametri dell'esperimento

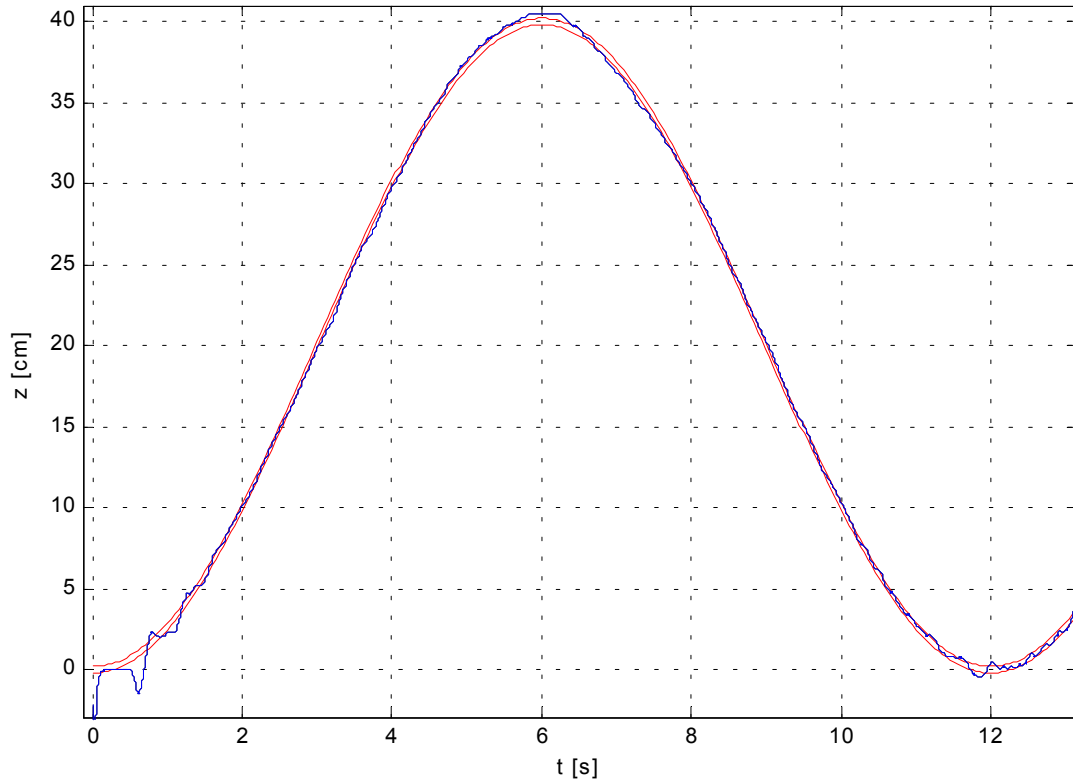
L'esperimento viene eseguito con i seguenti parametri:

passo di integrazione	0,001 s
poli dell'osservatore ridotto (ω_1 e ω_2)	-70 Hz; -75 Hz
polo dei primi filtri passabasso (nel blocco "pendolo")	-180 Hz (fil0)
polo dei secondi filtri passabasso (nel blocco "filtri")	- 70 Hz (fil1, per le misure), - 50 Hz (fil2, per gli stati osservati)
Periodo della sinusoide	12 s

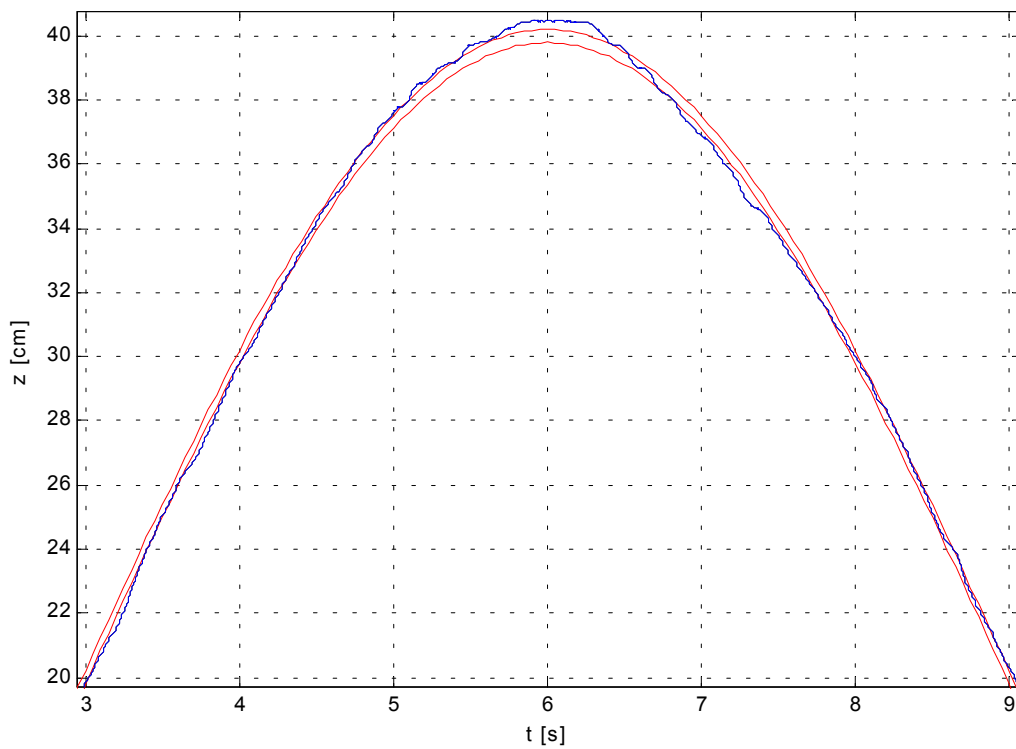
I pesi dell'LQR, e quindi i guadagni, sono gli stessi che per la simulazione.

4.4 Risultati dell'esperimento

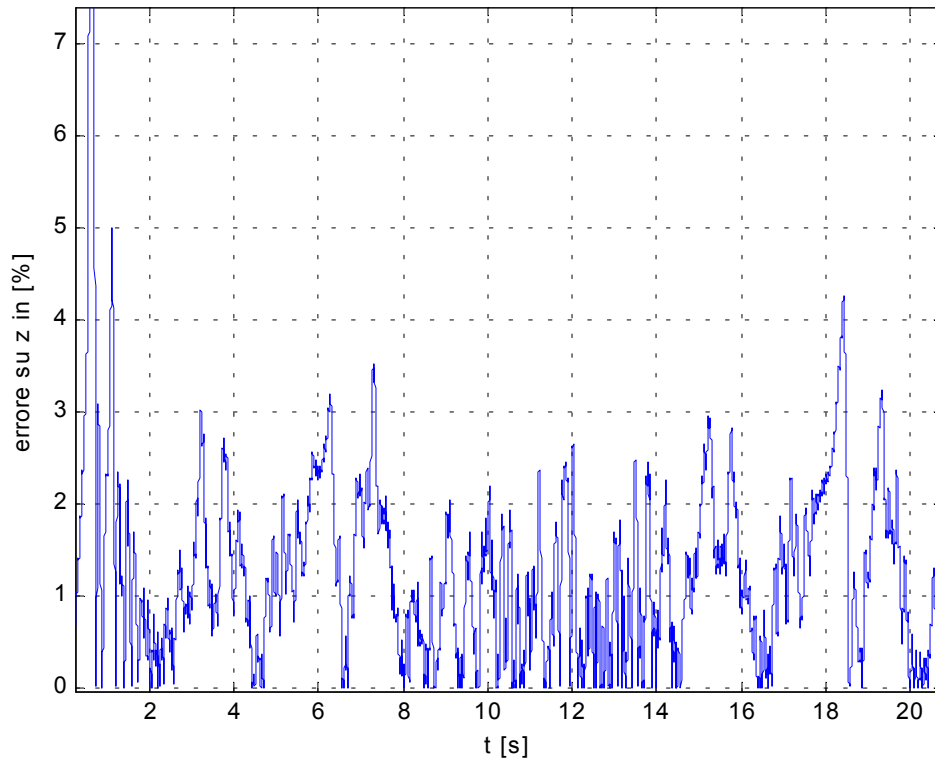
Nella realtà, come è prevedibile, le cose non vanno bene come nel simulatore. L'andamento della posizione del pendolo è:



Un dettaglio dell'onda:

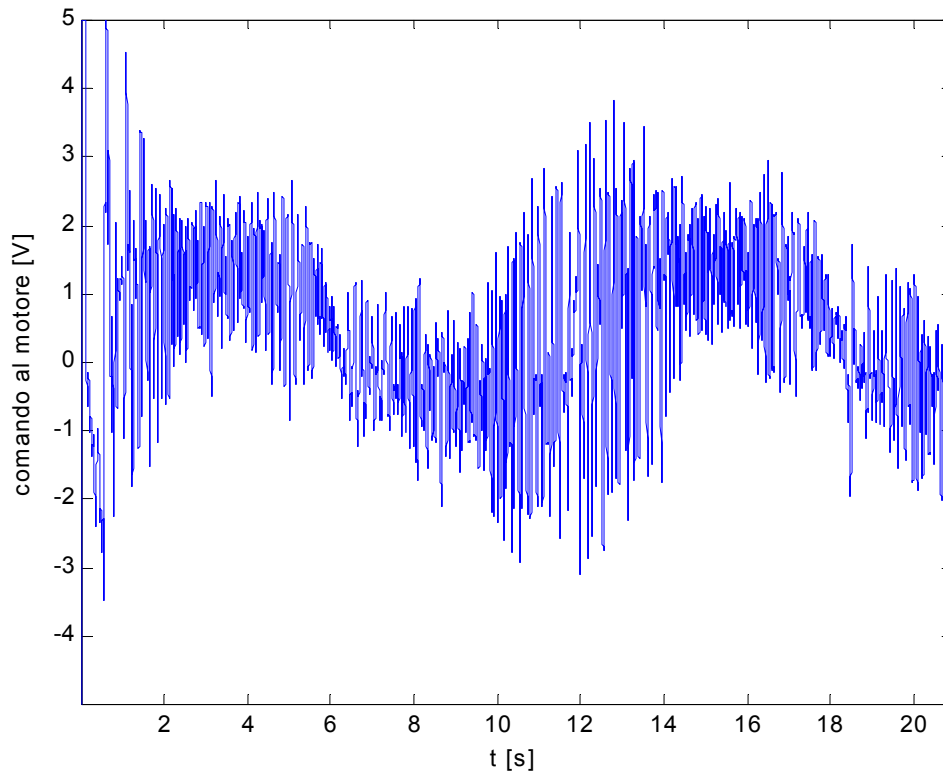


L'errore percentuale invece è:

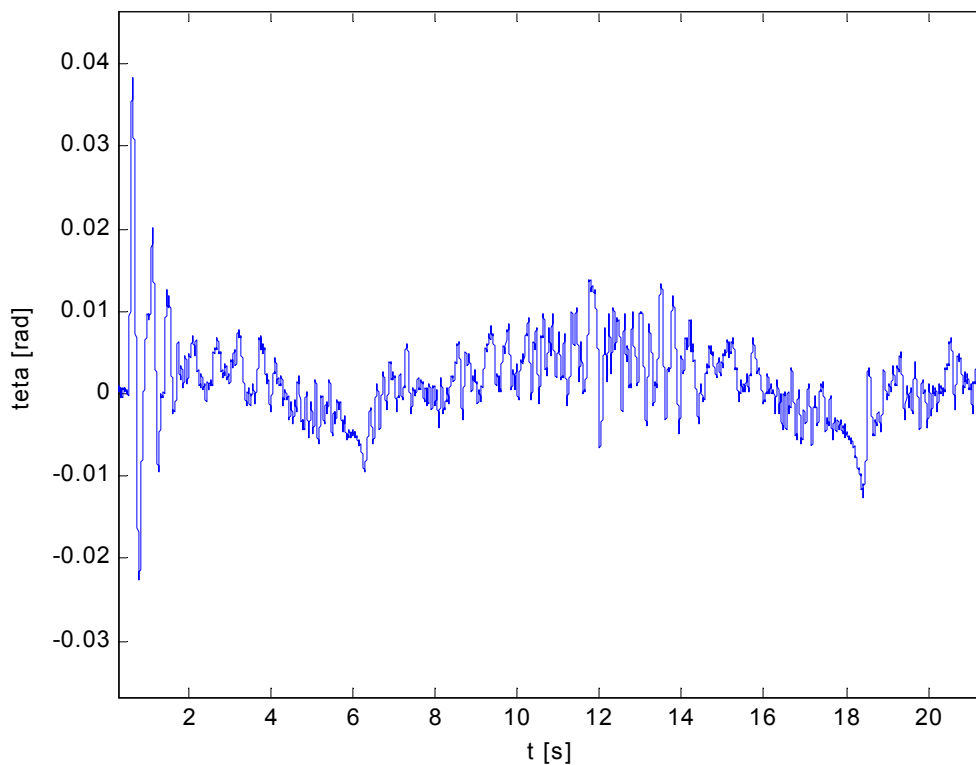


La specifica dell'errore minore dell'1% non è soddisfatta; comunque si può vedere che dopo il transitorio, l'errore si mantiene sotto il 3 % con qualche picco leggermente più alto.

Il comando nel corso del tempo è:

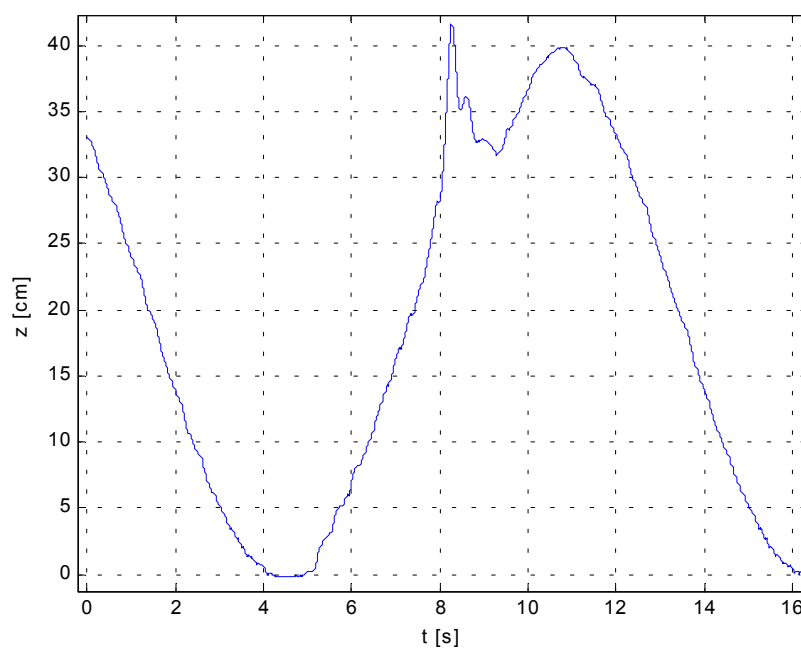


Infine ecco il grafico della posizione angolare dell'asta:



4.5 Risposta ad un impulso

Di seguito un grafico che mostra l'andamento di z durante una prova sperimentale in cui è stato disturbato il pendolo con un colpo sulla sua estremità superiore. Si può vedere che, dopo il colpo (dato circa al tempo $t = 8$ s) il sistema torna velocemente a regime.



Appendice

Per completezza si riporta il testo dello script per Matlab che esegue i calcoli necessari per avviare il sistema di controllo del pendolo vero.

```
% massa del carrello
M=0.455;
% massa del pendolo
m=0.210;
% lunghezza del pendolo
l=0.65/2;
% inerzia del pendolo
J=1/3*l^2*m;
% attrito
c=20;
% angolo della slitta
alfa=5/180*3.141592;
% gravita'
g=9.81;
% frequenza della sinusoide
w=2*pi/12;

% filtri
fil0=180;
fil1=70;
fil2=50;

% motore
Km=0.00767;
R=2.6;
tau=3.7;
r=0.00635;

% sensori
KSx=11.1;
KSteta=4;

% matrici del sistema
v=[1 0 0 0 0 0 0; 0 1 0 0 0 0 0; 0 0 m*l^2+J m*l*cos(alfa) 0 0 0 ;
0 0 l*m*cos(alfa) M+m 0 0 0 ; 0 0 0 0 1 0 0; 0 0 0 0 0 1 0 ;0 0 0
0 0 0 1 ];
a=[0 0 1 0 0 0 0; 0 0 0 1 0 0 0; m*g*l 0 l*sin(alfa) 0 0 0 0; 0 0
0 (-c) 0 0 0 ; 0 0 0 0 0 1 0;0 0 0 0 (-w^2) 0 0 ;0 1 0 0 (-1) 0 0
];
b=[0 0 0 (Km*tau/r/R) 0 0 0]';

t=([1 0 0 0 0 0 0; 0 1 0 0 (-1) 0 0; 0 0 1 0 0 0 0; 0 0 0 1 0 (-
1) 0; 0 0 0 0 1 0 0; 0 0 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 0 0 1]);

ACom=(t)*inv(v)*a*inv(t);
BCom=(t)*inv(v)*b;
AA=inv(v)*a;
```

```

BB=inv(v)*b;

A=inv(v(1:4,1:4))*a(1:4,1:4); % senza stati aggiunti
B=inv(v(1:4,1:4))*b(1:4); % senza stati aggiunti

% Verifica di osservabilità
C2=[1 0 0 0 ; 0 1 0 0 ];
disp('osservabilita');
N=[C2' A'*C2' (A')^2*C2' (A')^3*C2'];
rank (N)

% scomposizione
A11=A(1:2,1:2);
A12=A(1:2,3:4);
A21=A(3:4,1:2);
A22=A(3:4,3:4);

B11=B(1:2);
B22=B(3:4);

% osservatore
LR=(place(A22',A12',[-70; -75]))'
F=A22-LR*A12;
G=B22-LR*B11;
H=(A21+F*LR-LR*A11);

% LQR
Q=diag([59000 3000 0 0 0 0 90000])
[K,S,E] = lqr(ACom,BCom,Q,[5])

```

disponibile in rete all'indirizzo <http://pmassio.altervista.org>