ESERCIZI
di
FONDAMENTI DI AUTOMATICA

a cura di
Paolo Massioni
pmassio@hotmail.com

disponibile in rete all'indirizzo
http://pmassio.altervista.org

I testi degli esercizi sono tratti dai temi d'esame del prof. Paolo Rocco del Politecnico di Milano, scaricabili dal sito: http://www.elet.polimi.it/upload/rocco/.

PROBLEMA 1

Si consideri il seguente sistema dinamico a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + 2u(t) \\ y(t) = 3x(t) \end{cases}$$

1) Scrivere i movimenti liberi di stato e uscita a partire dal generico stato iniziale x_0;
2) Scrivere le espressioni dei movimenti forzati di stato e uscita quando $u(t)=sin(t)$;
3) Scrivere l'espressione dell'uscita complessiva quando t tende ad infinito;
4) Verificare il risultato del punto precedente col teorema della risposta in frequenza.

SOLUZIONE

Per scrivere le espressioni dei movimenti liberi e forzati ci sono due vie: ricordare la formula di Lagrange oppure risolvere l'equazione differenziale del sistema.
L'espressione di Lagrange è nota essere:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \mathbf{y}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}CB\mathbf{u}(\tau)d\tau + D\mathbf{u} \end{cases}$$

I coefficienti (tutti scalari in questo caso) sono: A=-1, B=2, C=3 e D=0. Il movimento libero è dato dunque da:

$$x_{libero} = x_0 e^{-t}$$
$$y_{libero} = 3x_0 e^{-t}$$

mentre per quello forzato:

$$x_{forzato} = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = 2\int_0^t e^{-(t-\tau)}\sin(\tau)d\tau = \left[e^{-t}e^{\tau}(\sin(\tau)-\cos(\tau))\right]_0^t = e^{-t} + \sin(t) - \cos(t)$$

e si ricava dunque:

$$x_{forzato} = e^{-t} + \sin(t) - \cos(t)$$
$$y_{forzato} = 3e^{-t} + 3\sin(t) - 3\cos(t)$$

In alternativa, non ricordando l'espressione di Lagrange, è possibile risolvere l'equazione differenziale, ricordando che l'integrale generale è dato dalla somma dell'integrale dell'equazione omogenea più un integrale particolare. Per quanto riguarda l'omogenea, la soluzione sarà del tipo:

$$x_{omogenea} = ae^{-t}$$

mentre l'integrale particolare, data la sinusoidalità di u, sarà del tipo:

$$x_{particolare} = b\sin(t) + c\cos(t)$$

sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene:

$$b\cos(t) - c\sin(t) = -b\sin(t) - c\cos(t) + 2\sin(t)$$

da cui sui trova che

$$\begin{cases} b = -c \\ -c = -b + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

per cui l'integrale generale viene ad essere:

$$x_{generale} = ae^{-t} + \sin(t) - \cos(t)$$

in cui imponendo la condizione iniziale:

$$x_0 = x_{generale}(0) = a - 1 \Rightarrow a = x_0 + 1$$

e dunque:

$$x_{generale} = x_0 e^{-t} + e^{-t} + \sin(t) - \cos(t)$$

in cui è possibile distinguere il moto forzato da quello libero perché il secondo dipende dalla condizione iniziale ed il primo no.

Se t tende ad infinito, avremo:

$$x_{asintotico} = \sin(t) - \cos(t) = \sqrt{2}\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_{asintotico} = 3\sqrt{2}\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

poiché i termini esponenziali tendono a zero.

Per verificare il teorema della risposta in frequenza, ricaviamo $G(s)$ passando nel dominio della trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} sX = -X + 2U \\ Y = 3X \end{cases}$$

da cui facilmente si trova:

$$Y(s) = \frac{6}{s+1}U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{6}{s+1}$$

la risposta in frequenza è data da:

$$G(j\omega) = \frac{6}{j\omega + 1}$$

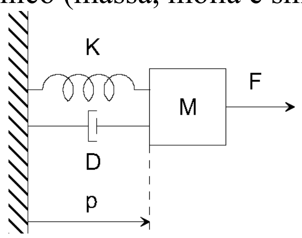
valutata per la pulsazione in esame, e cioè 1, si ottiene:

$$G(j) = \frac{6}{j+1} \Rightarrow \begin{cases} |G(j)| = 3\sqrt{2} \\ \arg(G(j)) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

proprio come si voleva dimostrare.

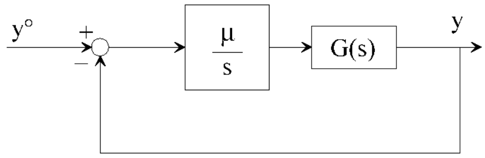
PROBLEMA 2

Si consideri il seguente sistema meccanico (massa, molla e smorzatore):



1) Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ dall'entrata F all'uscita p;
2) Posto M=1, D=3 e K=2, scrivere l'espressione analitica della risposta allo scalino unitario;

Si consideri il seguente sistema di controllo:



dove G è la funzione di trasferimento del punto 2, mentre μ>0

3) Determinare i valori di μ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

SOLUZIONE

Si può subito, dalla fisica del sistema:

$$M\ddot{p} = -Kp - D\dot{p} + F$$

scrivere le equazioni del sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{K}{M}x_1 - \dfrac{D}{M}x_2 + \dfrac{1}{M}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Si può poi passare nel dominio della trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} sX_1 = X_2 \\ sX_2 = -\dfrac{K}{M}X_1 - \dfrac{D}{M}X_2 + \dfrac{1}{M}U \Rightarrow s^2Y = -\dfrac{K}{M}Y - \dfrac{D}{M}sY + \dfrac{1}{M}U \Rightarrow Y = \dfrac{\dfrac{1}{M}}{s^2 + \dfrac{D}{M}s + \dfrac{K}{M}}U \\ Y = X_1 \end{cases}$$

per cui:

$$G(s) = \frac{1}{K}\frac{1}{\dfrac{M}{K}s^2 + \dfrac{D}{K}s + 1}$$

Con i numeri indicati, si ha:

$$G(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{\dfrac{1}{2}s^2 + \dfrac{3}{2}s + 1} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\dfrac{1}{2}s + 1\right)(s+1)}$$

la risposta allo scalino sarà:

$$Y(s) = \frac{1}{s}G(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{\dfrac{1}{2}s^3 + \dfrac{3}{2}s^2 + s}$$

alla quale si può applicare lo sviluppo di Heaviside:

$$Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{\dfrac{1}{2}s^3 + \dfrac{3}{2}s^2 + s} = \frac{a}{\dfrac{1}{2}s + 1} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s} = \frac{sa + s^2a + \dfrac{1}{2}s^2b + sb + \dfrac{1}{2}s^2c + \dfrac{3}{2}sc + c}{\dfrac{1}{2}s^3 + \dfrac{3}{2}s^2 + s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c=0 \\ a+b+\frac{3}{2}c=0 \\ c=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=-1 \Rightarrow \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$Y(s)==\frac{1}{2}\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{s} \Rightarrow y(t)=\text{sca}(t)\left(\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)$$

La funzione di trasferimento complessiva dell'anello chiuso sarà:

$$G'(s)==\frac{\frac{\mu}{s}\frac{1}{s^2+3s+2}}{1+\frac{\mu}{s}\frac{1}{s^2+3s+2}}=\frac{\mu}{s^3+3s^2+2s+\mu}$$

e per lo studio della stabilità si deve applicare il criterio di Routh:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & \mu & 0 \\ \frac{1}{3}(6-\mu) & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \end{array}$$

da cui (imponendo che i termini della prima colonna siano tutti concordi, cioè positivi in questo caso):

$$0<\mu<6$$

PROBLEMA 3

Si consideri il seguente sistema dinamico a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=\alpha x_2(t)+x_3(t) \\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)-3x_2(t) \\ \dot{x}_3(t)=x_2(t)-x_3(t)+2u(t) \\ y(t)=3x_1(t) \end{cases}$$

1) Determinare i valori del parametro α per cui il sistema è asintoticamente stabile;
2) Posto α =-2, determinare il guadagno statico del sistema;
3) Sempre per α =-2, determinare le caratteristiche asintotiche, per *t* che tende a infinito, del movimento libero e del movimento forzato dell'uscita quando *u*(*t*)=2sca(*t*).

SOLUZIONE

Conviene scrivere la funzione di trasferimento del sistema, passando nel dominio della trasformata di Laplace:

$$
\begin{cases} sX_1 = \alpha X_2 + X_3 \\ sX_2 = X_1 - 3X_2 \\ sX_3 = X_2 - X_3 + 2U \\ Y = 3X_1 \end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases} sX_1 = \alpha \dfrac{1}{s+3} X_1 + \dfrac{1}{(s+3)(s+1)} X_1 + \dfrac{2}{s+1} U \\ X_2 = \dfrac{1}{s+3} X_1 \\ X_3 = \dfrac{1}{(s+3)(s+1)} X_1 + \dfrac{2}{s+1} U \\ Y = 3X_1 \end{cases}
\Rightarrow
$$

$$
sX_1 - \alpha \frac{1}{s+3} X_1 - \frac{1}{(s+3)(s+1)} X_1 = \frac{2}{s+1} U
$$

$$
\frac{s^3 + 4s^2 + (3-\alpha)s - (\alpha+1)}{(s+3)(s+1)} X_1 = \frac{2}{s+1} U
$$

$$
Y = 6 \frac{(s+3)(s+1)}{(s+1)\left(s^3 + 4s^2 + (3-\alpha)s - (\alpha+1)\right)} U
$$

per cui:

$$
G(s) = 6 \frac{s+3}{s^3 + 4s^2 + (3-\alpha)s - (\alpha+1)}
$$

la discussione della stabilità richiede la compilazione della tabella di Routh:

$$
\begin{array}{cc:c}
1 & 3-\alpha & 0 \\
4 & -1-\alpha & 0 \\
\frac{1}{4}(13-3\alpha) & 0 & 0 \\
-1-\alpha & 0 & 0
\end{array}
$$

da cui (imponendo che i termini della prima colonna siano tutti concordi, cioè positivi in questo caso):

$$
\alpha < -1
$$

Per α =-2 vale:

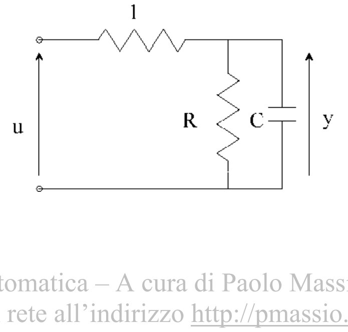
$$
G(s) = 6 \frac{s+3}{s^3 + 4s^2 + 5s + 1} = 18 \frac{\frac{1}{3}s + 1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 1}
$$

da cui risulta un guadagno statico pari a 18.

In presenza di un segnale $u(t)$=2sca(t) il movimento libero tenderà ad annullarsi per t che tende ad infinito data l'asintotica stabilità. Il movimento forzato tenderà invece al valore costante di 2 volte il guadagno (36).

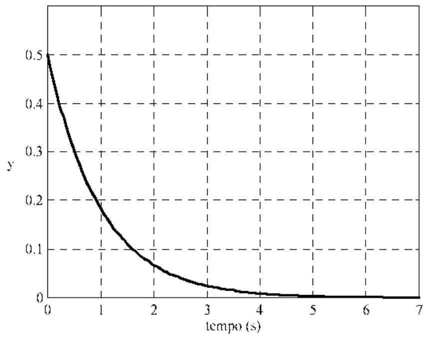
PROBLEMA 4

In relazione alla seguente rete elettrica:



1) Determinare la funzione di trasferimento dalla tensione *u* alla tensione *y*.

Il grafico di seguito mostra l'andamento della risposta all'impulso:



2) Determinare *R* e *C* sulla base del grafico

SOLUZIONE

Chiamando i_1 e i_2 le due correnti di maglia (antiorarie), con le leggi ai nodi ed alle maglie si può scrivere:

$$i_2 = -C\dot{y}$$

$$y = (i_2 - i_1)R \Rightarrow i_1 = \frac{i_2 R - y}{R}$$

$$u + i_1 = (i_2 - i_1)R \Rightarrow u + \frac{-C\dot{y}R - y}{R}(R+1) = -C\dot{y}R \Rightarrow \dot{y} = -y\frac{(R+1)}{CR} + \frac{1}{C}u$$

la cosa che conta è che:

$$\dot{y} = -y\frac{(R+1)}{CR} + \frac{1}{C}u$$

la funzione di trasferimento è ricavabile facilmente passando al dominio della trasformata di Laplace, da cui:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{C}}{\frac{(R+1)}{CR} + s} = \frac{R}{1 + R + sCR}$$

La risposta all'impulso è la funzione di trasferimento stessa (sarebbe la funzione di trasferimento per 1); dal teorema del valore iniziale:

$$y(0) = \lim_{s \to +\infty} sY(s) = \lim_{s \to +\infty} \frac{sR}{1 + R + sCR} = \frac{1}{C}$$

dal grafico appare che tale valore è 0,5, da cui:

$$C = 2$$

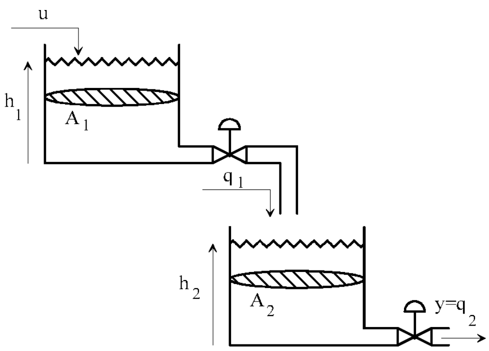
La durata del transitorio (sembra essere 5) è pari a 5 volte la costante di tempo, che è

$$\frac{CR}{1+R} = \frac{2R}{1+R} = 1 \Rightarrow 2R = 1 + R \Rightarrow$$

$$R = 1$$

PROBLEMA 5

Si consideri il sistema idraulico in figura:



Il sistema è costituito da due serbatoi di sezione costante collegati da una valvola; anche il secondo serbatoio presenta una valvola di uscita. Le due valvole, entrambe ad apertura costante, stabiliscono tra la portata di liquido che le attraversa e il livello nel serbatoio a monte le relazioni:

$$q_1 = \alpha_1 \sqrt{h_1}$$
$$q_2 = \alpha_2 \sqrt{h_2}$$

Si assuma come ingresso la portata entrante *u* e come uscita *y* la portata in uscita q_2.

1) Posto A_1=1, A_2=1, α_1=1 e α_2=1, determinare il punto di equilibrio corrispondente ad una entrata costante $u = \bar{u} = 3$;
2) Discutere la stabilità del punto di equilibrio trovato precedentemente;
3) Si supponga che a partire dal punto di equilibrio di cui sopra il sistema sia sottoposto ad una piccola variazione a scalino dell'ingresso *u*. Tracciare l'andamento qualitativo dell'uscita *y* a seguito di tale perturbazione.

SOLUZIONE

Le variabili di stato sono chiaramente i due livelli; si può scrivere:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 A_1 = u - \alpha_1 \sqrt{h_1} \\ \dot{h}_2 A_2 = \alpha_1 \sqrt{h_1} - \alpha_2 \sqrt{h_2} \end{cases}$$

per cui le equazioni del sistema, con i numeri proposti, diventano:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sqrt{x_1} + u \\ \dot{x}_2 = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \\ y = \sqrt{x_2} \end{cases}$$

Il punto di equilibrio si trova annullando le derivate:

$$\begin{cases} 0 = -\sqrt{x_1} + 3 \Rightarrow x_1 = 9 \\ 0 = \sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \Rightarrow x_2 = 9 \Rightarrow \\ y = \sqrt{h_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 9 \\ \bar{x}_1 = 9 \\ \bar{y} = 3 \end{cases}$$

Per la discussione della stabilità si deve linearizzare il sistema nell'intorno del punto di equilibrio:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -\left.\dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}\right|_{x_1=9} \delta x_1 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 = \left.\dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}\right|_{x_1=9} \delta x_1 - \left.\dfrac{1}{2\sqrt{x_2}}\right|_{x_2=9} \delta x_2 \\ \delta y = \left.\dfrac{1}{2\sqrt{x_2}}\right|_{x_1=9} \delta x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -\dfrac{1}{6}\delta x_1 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 = \dfrac{1}{6}\delta x_1 - \dfrac{1}{6}\delta x_2 \\ \delta y = \dfrac{1}{6}\delta x_2 \end{cases}$$

la matrice A del sistema è dunque:

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{6} & 0 \\ \dfrac{1}{6} & -\dfrac{1}{6} \end{bmatrix}$$

essendo triangolare presenta gli autovalori sulla diagonale; dato che sono negativi l'equilibrio è stabile.

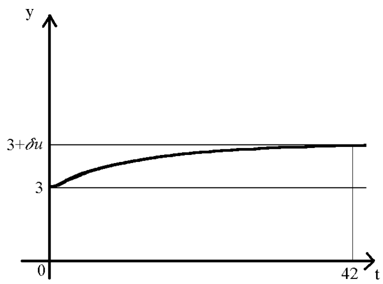
Per lo studio della perturbazione allo scalino si fa sempre ricorso al sistema linearizzato. Se ne può scrivere la funzione di trasferimento passando nel dominio della trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} s\delta X_1 = -\dfrac{1}{6}\delta X_1 + \delta U \Rightarrow \left(36s^2 + 6s\right)\delta X_2 = -\left(6s+1\right)\delta X_2 + 6\delta U \\ s\delta X_2 = \dfrac{1}{6}\delta X_1 - \dfrac{1}{6}\delta X_2 \Rightarrow \delta X_1 = \left(6s+1\right)\delta X_2 \qquad \Rightarrow \left(36s^2 + 12s + 1\right)\delta Y = \delta U \\ \delta Y = \dfrac{1}{6}\delta X_2 \end{cases}$$

per cui:

$$G(s) = \frac{1}{36s^2 + 12s + 1} = \frac{1}{\left(6s+1\right)^2}$$

A questo tipo di funzioni di trasferimento è associato un transitorio della durata di circa 7 volte la costante di tempo, con tangenza orizzontale iniziale. L'andamento qualitativo del grafico sarà:



PROBLEMA 6

Si consideri il generico sistema dinamico lineare:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

1) Scrivere le espressioni del movimento libero di stato ed uscita;
2) Scrivere le espressioni del movimento forzato di stato ed uscita;

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

3) Determinare le espressioni del movimento libero dell'uscita sistema a partire dalla condizione iniziale:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE

Per rispondere ai primi quesiti è sufficiente conoscere la formula di Lagrange:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \mathbf{y}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}CB\mathbf{u}(\tau)d\tau + D\mathbf{u} \end{cases}$$

in cui i primi termini (quelli dipendenti dalla condizione iniziale) sono i movimenti liberi, mentre i secondi (gli integrali) sono quelli forzati.

La richiesta di determinare il movimento libero nel caso proposto porta alla necessità di risolvere le equazioni differenziali del sistema in presenza di entrata nulla:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

la prima è disaccoppiata, per cui:

$$\begin{cases} x_1 = ae^{-t} \\ \dot{x}_2 + 2x_2 = ae^{-t} \end{cases}$$

la soluzione della seconda sarà data dalla somma di un integrale particolare e dell'integrale dell'omogenea;
equazione omogenea: $x_{2o} = be^{-2t}$
integrale particolare: $x_p = ce^{-t}$
sostituendo l'integrale particolare:

$$-ce^{-t} + 2ce^{-t} = ae^{-t} \Rightarrow c = a$$

l'integrale generale viene dunque ad essere:

$$\begin{cases} x_1 = ae^{-t} \\ x_2 = ae^{-t} + be^{-2t} \end{cases}$$

applicando la condizione iniziale, è facile vedere che:

$$\begin{cases} x_1 = e^{-t} \\ x_2 = e^{-t} \end{cases}$$

uno dei termini esponenziali è sparito! Ma niente paura, può capitare.
Il movimento libero dell'uscita sarà:

$$\mathbf{y}_l(t) = C\mathbf{x}_l = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = 3e^{-t}$$

PROBLEMA 7

In riferimento al generico sistema dinamico tempo-invariante:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{cases}$$

1) Dare la definizione di stabilità del movimento;
2) Dire per quale categoria di sistemi tempo-invarianti ha senso parlare di "stabilità del sistema" e per quale motivo.

In relazione al seguente sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \alpha x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + \alpha x_2 - x_3 + u \\ y = x_3 \end{cases}$$

3) Determinare i valori di α per cui il sistema è stabile asintoticamente;
4) Specificare se per i valori di α prima ricavati il sistema è anche a fase minima.

SOLUZIONE

Sia: $\mathbf{x}_n(t)$ il movimento del sistema dinamico sotto esame che ha origine con una entrata $\mathbf{u}_0(t)$ da una condizione iniziale $\mathbf{x}_{n0}$ al tempo t_0.
Sia: $\mathbf{x}_p(t)$ il movimento del sistema dinamico sotto esame che ha origine con una stessa entrata $\mathbf{u}_0(t)$ da una condizione iniziale $\mathbf{x}_{p0}$ al tempo t_0.
Il movimento $\mathbf{x}_n(t)$ si dice "stabile" (secondo Lyapunow) se e soltanto se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid \left(\left\| \mathbf{x}_{n0} - \mathbf{x}_{p0} \right\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left\| \mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_p(t) \right\| < \varepsilon \ \forall t > t_0 \right)$$

Per i sistemi lineari si può dimostrare che lo studio della stabilità porta agli stessi risultati per tutti i movimenti; pertanto si può parlare di "stabilità del sistema". Infatti definendo:

$$\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{x}_n - \delta\mathbf{x}_p$$

$$\delta\mathbf{x}_0 = \delta\mathbf{x}_{n0} - \delta\mathbf{x}_{p0}$$

e sottraendo membra a membro le equazioni differenziali che descrivono i due movimenti, si ottiene:

$$\begin{cases} \delta\dot{\mathbf{x}}(t) = A\,\delta\mathbf{x}(t) \\ \delta\mathbf{x}(0) = \delta\mathbf{x}_0 \end{cases}$$

lo studio della stabilità è dunque indipendente dai movimenti, e concerne soltanto lo matrice A.

Il sistema proposto:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \alpha x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + \alpha x_2 - x_3 + u \\ y = x_3 \end{cases}$$

è lineare; la sua matrice A è

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \end{bmatrix}$$

se ne può scrivere il polinomio caratteristico:

$$\Pi(\lambda) = (\lambda+1)^2 \lambda - 2\alpha(\lambda+1) = (\lambda+1)(\lambda^2 + \lambda - 2\alpha)$$

senza bisogno di Routh, si vede che è necessario e sufficiente per la stabilità che i coefficienti del secondo fattore del polinomio siano concordi, per cui:

$$\alpha < 0$$

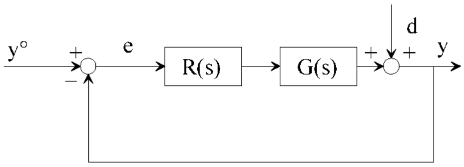
Si può scrivere la funzione di trasferimento del sistema passando nel dominio della trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} sX_1 = -X_1 + \alpha X_2 \\ sX_2 = 2X_1 \\ sX_3 = -X_1 + \alpha X_2 - X_3 + U \\ Y = X_3 \end{cases} \Rightarrow Y = \frac{1}{1+s} U$$

sono chiaramente intervenute delle cancellazioni (in effetti è facile vedere che le due prime variabili di stato non sono raggiungibili). Il guadagno è positivo sempre, e i poli sono a parte reale negativa quando il sistema è stabile; perciò per tutti i valori di α trovati il sistema è anche a fase minima.

PROBLEMA 8

Si consideri il sistema di controllo in figura:



Dove

$$G(s) = 10 \frac{1-2s}{(1+10s)^2 (1+0.5s)}$$

1) Determinare la funzione di trasferimento del regolatore tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y^0(t) = 2\text{sca}(t)$ ed in assenza di disturbo d, l'errore a transitorio esaurito sia minore o uguale a 0.03;

- Il margine di fase sia maggiore o uguale a 50° e la banda passante la più grande possibile.

2) Con tale regolatore così progettato, determinare l'insieme delle pulsazioni $\overline{\omega}$ per cui un disturbo in linea d'andata $d(t)=\sin(\overline{\omega}t)$ sia attenuato all'uscita y di almeno un fattore 10.

SOLUZIONE

La funzione cercata sarà posta:

$$R(s)=R_1(s)R_2(s)$$

dove la prima soddisferà il progetto statico e la seconda il progetto dinamico.
Per la condizione sull'errore, avremo:

$$e_\infty=\lim_{s\to 0}\left(s\frac{2}{s}\frac{1}{1+R_1(s)G(s)}\right)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{2}{1+\frac{\mu_R}{s^{g_R}}10}\right)=\frac{2}{1+10\mu_R}\ \text{se}\ g_R=0$$

da cui:

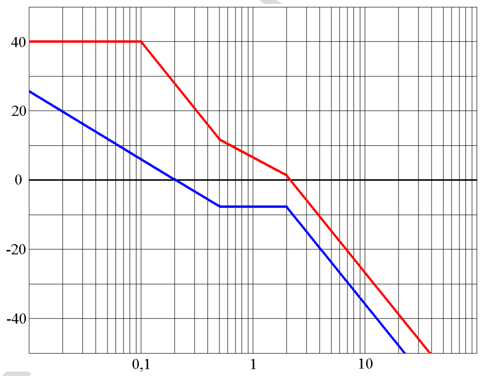
$$e_\infty=\frac{2}{1+10\mu_R}\le 0{,}03\Rightarrow 1{,}97\le 0{,}3\mu_R\Rightarrow \mu_R\ge 6{,}56$$

per sicurezza e comodità si pone:

$$\mu_R=10$$

Per le prestazioni dinamiche, si comincia col disegnare il diagramma di Bode della funzione:

$$L_1(s)=R_1(s)G(s)=10G(s)=100\frac{1-2s}{(1+10s)^2(1+0.5s)}\ \text{(in rosso)}$$



il sistema non è a fase minima, pertanto bisognerà tenere conto del contributo di fase dello zero.
Una soluzione potrebbe essere quella di tagliare l'asse a zero decibel prima di tale zero, per esempio a 0,2. Un polo in bassa frequenza (fuori dal grafico!) e uno in alta frequenza servono per raccordare le due funzioni agli estremi.
La funzione d'anello sarà dunque:

$$L(s)=100\frac{1-2s}{(1+500s)(1+0{,}5s)^2}\ \text{(in blu)}$$

$$\begin{cases}\omega_c\cong 0{,}2\\ \varphi_c\cong -\arctan(2\cdot 0{,}2)-\arctan(500\cdot 0{,}2)-2\arctan(0{,}5\cdot 0{,}2)\cong -21{,}8°-89{,}4°-11{,}4°=-122{,}6°\\ \varphi_m\cong 180°-122{,}6°=57{,}4°\end{cases}$$

La specifica è dunque soddisfatta. Aumentare ulteriormente la banda passante non è possibile, perché lo zero di $G(s)$ non può essere cancellato e avere pulsazione critica oltre a tale zero significherebbe margine di fase negativo. Si può dunque scrivere che:

$$R(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = 10\frac{(1+10s)^2}{(1+500s)(1+0,5s)}$$

La funzione di trasferimento del disturbo in linea d'andata è:

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{1}{1+L(s)}$$

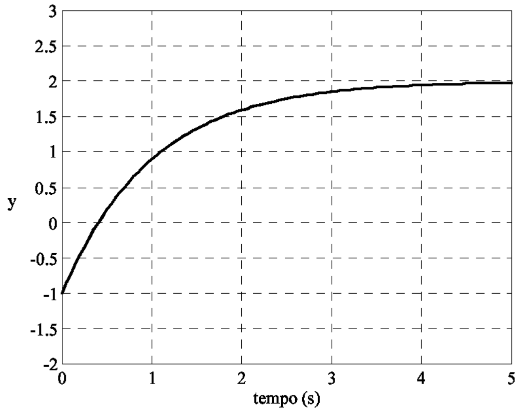
la richiesta fatta si traduce dunque in:

$$\left|\frac{1}{1+L(j\overline{\omega})}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \text{(approssimando)} \left|L(j\overline{\omega})\right| > 10$$

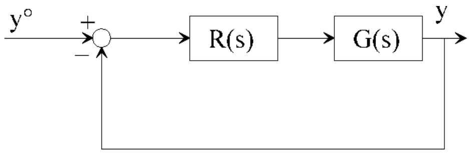
Dal grafico si vede che ciò è vero per $\overline{\omega} < 0,02$ (dato che al valore 10 corrispondono 20 decibel).

PROBLEMA 9

Un sistema dinamico presenta la seguente risposta allo scalino unitario:



1) Determinare l'espressione $G(s)$ della funzione di trasferimento.
2) Considerando il seguente sistema retroazionato:



in cui

$$R(s) = \frac{k}{s}$$

tracciare il luogo delle radici al variare di k, per $k > 0$.
3) Sulla base del luogo precedentemente tracciato, spiegare se è possibile rendere il sistema di controllo arbitrariamente veloce (ossia aumentarne arbitrariamente la banda passante).

SOLUZIONE

La risposta allo scalino con risposta inversa iniziale è tipica di funzioni di trasferimento del primo ordine con uno zero reale positivo. La costante di tempo sembra essere circa 1, il guadagno è chiaramente 2, pertanto la funzione sarà del tipo:

$$G(s)=2\frac{\tau s+1}{s+1}$$

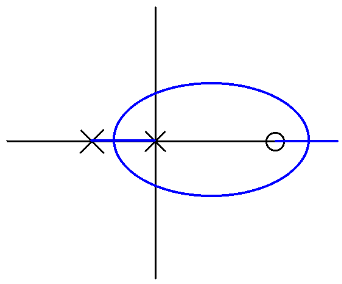
per determinare il valore dell'ultima costante rimasta si può usare il teorema del valore iniziale:

$$-1=\lim_{s\to\infty}\left(s\frac{1}{s}G(s)\right)=2\frac{\tau s+1}{s+1}=2\tau\Rightarrow\tau=-\frac{1}{2}\Rightarrow G(s)=2\frac{1-0{,}5s}{1+s}$$

La funzione di trasferimento d'anello sarà:

$$G(s)=2k\frac{1-0{,}5s}{s(1+s)}=-k\frac{s-2}{s(s+1)}$$

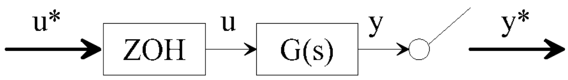
Interesserà il luogo delle radici inverso (se $k>0$). Il luogo ha 2 rami che partono dai poli per terminare uno all'infinito e uno nello zero. Il disegno sarà dunque:



Affinché il sistema sia stabile in anello chiuso, le radici devono essere a parte reale negativa. Per poter rendere il sistema arbitrariamente veloce dovrebbe essere possibile aumentare il fattore k all'infinito, ma come si vede dal grafico ciò comporterebbe la nascita di radici a parte reale positiva. La risposta è dunque negativa.

PROBLEMA 10

Si consideri il seguente sistema a segnali campionati:



dove

$$G(s)=\frac{5s}{(s-2)(s+3)}$$

e il tempo di campionamento è 1.

1) Determinare l'espressione della funzione di trasferimento $G^*(z)$ da u^* a y^*.
2) Commentare il legame tra i poli di $G^*(z)$ e quelli di $G(z)$, estendendo il risultato al caso generale.

SOLUZIONE

Si intende utilizzare il metodo di dare alla $G(s)$ uno scalino a tempo continuo, trovare l'espressione analitica della risposta, campionarla, trovarne la trasformata zeta da cui trovare la richiesta $G^*(z)$.
La risposta allo scalino è:

$$Y(s)=\frac{5}{(s-2)(s+3)}$$

è ora necessario uno sviluppo di Heaviside:

$$Y(s)=\frac{5}{(s-2)(s+3)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+3}=\frac{sA+3A+sB-2B}{(s-2)(s+3)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\3A-2B=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+3}\Rightarrow y(t)=\text{sca}(t)\left(e^{2t}-e^{-3t}\right)$$

si “campiona”:

$$y^*(k)=y(kT)=e^{2kT}-e^{-3kT}=e^{2k}-e^{-3k}\ (\text{per } k\geq 0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y^*(z)=\frac{z}{z-e^{2}}-\frac{z}{z-e^{-3}}=\left(e^{2}-e^{-3}\right)\frac{z}{\left(z-e^{2}\right)\left(z-e^{-3}\right)}$$

in ultimo:

$$G^*(z)=\frac{Y^*(z)}{\dfrac{z}{z-1}}=\left(e^{2}-e^{-3}\right)\frac{z}{\left(z-e^{2}\right)\left(z-e^{-3}\right)}\frac{z-1}{z}=\left(e^{2}-e^{-3}\right)\frac{z-1}{\left(z-e^{2}\right)\left(z-e^{-3}\right)}$$

Fra i poli della funzione a tempo continuo e quella a tempo discreto vale la relazione:

$$p_{discreto}=e^{p_{continuo}}$$

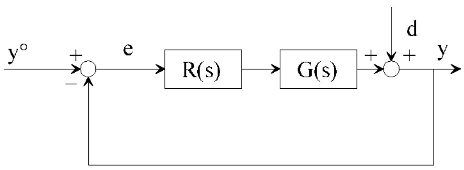
infatti nel caso generale si ha che:

$$p_{discreto}=e^{Tp_{continuo}}$$

dove T è il tempo di campionamento.

PROBLEMA 11

Si consideri il sistema di controllo in figura:



Dove

$$G(s)=\frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+0{,}5s)}$$

1) Determinare la funzione di trasferimento del regolatore tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y^0(t)=A\text{sca}(t)$ ed di disturbo $d(t)=D\text{sca}(t)$, con $|A|\leq 2$ e $|D|\leq 1$ l’errore a transitorio esaurito sia minore o uguale a 0.05;
- Il margine di fase sia maggiore o uguale a 60° e la pulsazione critica maggiore o uguale a 0,5 rad/s.
- Il regolatore sia di ordine non superiore a due.

2) Con tale regolatore così progettato, tracciare il diagramma polare qualitativo associato alla funzione di trasferimento d'anello, individuando approssimativamente il punto corrispondente a $\omega = \omega_c$.

SOLUZIONE

La funzione cercata sarà posta:

$$R(s) = R_1(s) R_2(s)$$

dove la prima soddisferà il progetto statico e la seconda il progetto dinamico.
Per la condizione sull'errore, avremo:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0}\left(s \frac{A+D}{s} \frac{1}{1+R_1(s)G(s)} \right) = (A+D)\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{1+\frac{\mu_R}{s^{g_R}}10} \right) = \frac{A+D}{1+10\mu_R} \text{ se } g_R = 0$$

da cui:

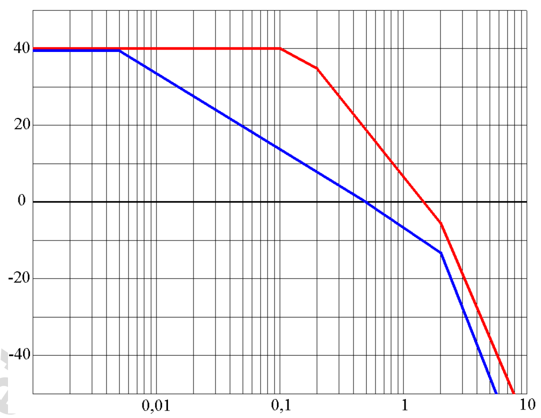
$$e_\infty = \frac{A+D}{1+10\mu_R} \le 0{,}05 \Rightarrow 2{,}95 \le 0{,}5\mu_R \Rightarrow \mu_R \ge 5{,}9$$

per sicurezza e comodità si pone:

$$\mu_R = 10$$

Per le prestazioni dinamiche, si comincia col disegnare il diagramma di Bode della funzione:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{100}{(1+10s)(1+5s)(1+0{,}5s)} \text{ (in rosso)}$$



il sistema è a fase minima quindi non dà particolari problemi, l'unica accortezza da avere è quella di limitare l'ordine per cui si cerca di mantenere il più possibile gli zeri originari. Se si taglia l'asse a zero decibel in 0,5 come richiesto una possibile scelta è:

$$L(s) = \frac{100}{(1+200s)(1+0{,}5s)^2} \text{ (in blu)}$$

per cui si ha:

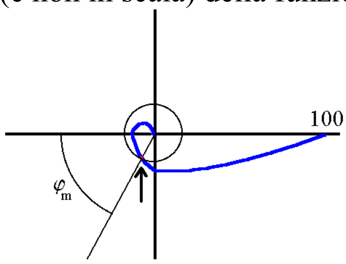
$$\begin{cases} \omega_c \cong 0{,}5 \\ \varphi_c \cong -\arctan(200\cdot 0{,}5) - 2\arctan(0{,}5\cdot 0{,}5) \cong -89{,}4° - 28{,}1° = -117{,}5° \\ \varphi_m \cong 180° - 117{,}5° = 62{,}5° \end{cases}$$

La specifica è dunque soddisfatta. Si può dunque scrivere che:

$$R(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = 10\frac{(1+10s)(1+5s)}{(1+200s)(1+0{,}5s)}$$

che è di ordine due.

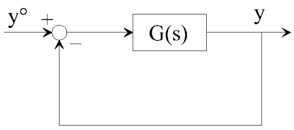
Il diagramma polare approssimativo (e non in scala) della funzione d'anello è:



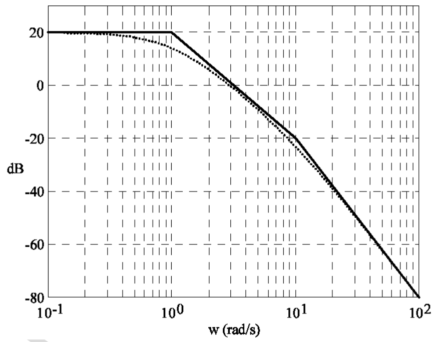
il punto richiesto è quello indicato; la circonferenza indicata è quella di raggio 1.

PROBLEMA 12

Si consideri il seguente sistema in retroazione:

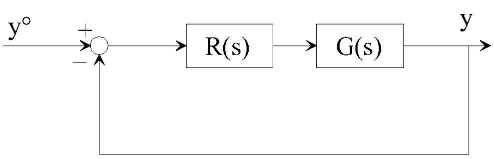


in cui $G(s)$ è un sistema dinamico, a fase minima, il cui diagramma del modulo della risposta in frequenza è riportato qui di seguito:



1) Determinare in via approssimativa il tempo di assestamento della risposta allo scalino.
2) Determinare approssimativamente il margine di guadagno del sistema in anello chiuso.

Si consideri il seguente sistema di controllo:



dove $G(s)$ è la funzione di trasferimento del sistema del punto precedente. Si supponga di volere determinare il regolatore nella classe dei PID, utilizzando le regole di Ziegler e Nichols in anello chiuso.
3) Determinare i valori T dell'oscillazione critica ed il valore K_p del guadagno critico.

SOLUZIONE

Dal diagramma di Bode si può risalire alla funzione di trasferimento perché sappiamo che è a fase minima:

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)^2(1+0{,}1s)}$$

$$\begin{cases} \omega_c \cong 3 \\ \varphi_c \cong -2\arctan(1 \cdot 3) - \arctan(0{,}1 \cdot 3) \cong -143{,}1° - 16{,}7° - 11{,}4° = -159{,}8° \\ \varphi_m \cong 180° - 159{,}8° = 20{,}2° \end{cases}$$

Possiamo stimare la funzione di trasferimento dell'anello chiuso come:

$$F(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_c}s + \frac{1}{\omega_c^2}s^2}$$

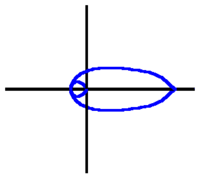
dato il basso margine di fase. Si stima:

$$\xi \cong \frac{\varphi_m}{100°} \cong 0{,}2$$

pertanto il tempo di assestamento è stimabile come:

$$T_a \cong \frac{5}{\omega_c \xi} = 8{,}3$$

Per la determinazione del margine di fase, conviene tracciare rapidamente il diagramma di Nyquist:



non ci sono poli a parte reale positiva, pertanto la linea non deve girare attorno a –1. Si cerca la pulsazione per cui avviene l'attraversamento dell'asse reale, cioè quella che dà fase pari a –180°:

$$-180° = 2\arctan(1 \cdot \omega_\pi) - \arctan(0{,}1 \cdot \omega_\pi)$$

Questa equazione è problematica perché non è risolubile analiticamente. Tuttavia con alcuni tentativi si trova facilmente che $\omega_\pi \cong 2$; ora si può calcolare il margine di guadagno:

$$k_m = \frac{1}{|G(j\omega_\pi)|} \cong \frac{|(1+2j)|^2 |(1+0{,}2j)|}{10} \cong 0{,}5$$

Dalla teoria sappiamo che il metodo di Ziegler e Nichols per l'anello chiuso si basa proprio sull'individuazione sperimentale del margine di guadagno, e che risulta:

$$K_p = k_m = 0{,}5$$

mentre per il periodo dell'oscillazione sappiamo che esso sarà:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_\pi} \cong \pi$$

PROBLEMA 13

Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_1(k) + u^2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k)x_2(k) \\ x_3(k+1) = x_1(k) + x_2(k)x_3(k) \end{cases}$$

1) Determinare il punto d'equilibrio corrispondente all'ingresso costante e pari a 3.
2) Discutere a stabilità di tale equilibrio.

SOLUZIONE

Per trovare l'equilibrio basta porre:

$$x_i(k+1) = x_i(k) = \bar{x} \Rightarrow_i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 2\bar{x}_1 + 4 \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2\bar{x}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = -4 \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_3 = -4 \end{cases}$$

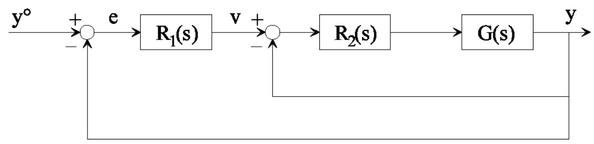
Per lo studio della stabilità bisogna linearizzare il sistema nell'intorno del punto di equilibrio:

$$\begin{cases} \delta x_1(k+1) = 2\delta x_1(k) + 4\delta u(k) \\ \delta x_2(k+1) = -4\delta x_2(k) \\ \delta x_3(k+1) = \delta x_1(k) - 4\delta x_2(k) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

la matrice del sistema è triangolare e pertanto presenta i suoi autovalori sulla diagonale. Il sistema considerato è instabile perché ha degli autovalori a modulo maggiore di uno.

PROBLEMA 14

Si consideri il sistema di controllo in figura:



in cui

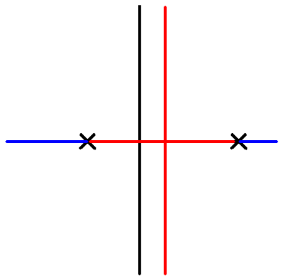
$$G(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}$$

1) Determinare la funzione di trasferimento $R_2(s)$ del regolatore dell'anello interno in modo che il sistema di funzione di trasferimento $Y(s)/V(s)$ sia asintoticamente stabile, con due poli coincidenti in $s = -2$.
2) Si progetti quindi il regolatore $R_1(s)$ dell'anello esterno nella classe dei regolatori integrali, in modo che il margine di fase valga almeno 30°.

3) Con i regolatori progettati, determinare approssimativamente il tempo di assestamento della risposta della risposta y allo scalino in $y°$.

SOLUZIONE

Per la prima richiesta il conviene sfruttare il luogo delle radici; per $G(s)$ è facilissimo da disegnare e sarà (in rosso il diretto, in blu l'inverso):



l'asintoto verticale si trova in mezzo ai due poli, e dunque a 0,5. Il polo positivo non può essere cancellato, ma si può spostare l'altro ancora a sinistra (fino a –6) in modo che il punto medio fra i due poli rimasti sia proprio –2. Il regolatore sarà dunque:

$$R_2(s) = \rho \frac{s+1}{s+6} \Rightarrow R_2(s)G(s) = \frac{1}{(s-2)(s+6)}$$

dalla regola di punteggiatura:

$$\rho = |(-2-2)(-2+6)| = 16$$

e quindi:

$$R_2(s) = 18\frac{s+1}{s+6} \Rightarrow R_2(s)G(s) = \frac{16}{(s-2)(s+6)} \Rightarrow G'(s) = \frac{16}{(s+2)^2} = \frac{4}{(1+0{,}5s)^2}$$

Per l'altro regolatore, che deve essere integrale, non ci sono specifiche sull'errore a transitorio esaurito, pertanto il progetto statico non pone particolari vincoli. Il regolatore sarà dunque del tipo:

$$R_1(s) = \frac{\mu}{s} \Rightarrow L(s) = \frac{4\mu}{s(1+0{,}5s)^2}$$

l'unica cosa che si può fare è cercare di regolare il guadagno affinché la pulsazione critica sia minore di 2, per evitare i contributi sulla fase degli altri due poli. Si può per esempio tagliare in $\omega_c = 1$, ponendo:

$$4\mu = 1 \Rightarrow \mu = 0{,}25$$

per cui:

$$\begin{cases} \omega_c \cong 1 \\ \varphi_c \cong -90° - 2\arctan(0{,}5 \cdot 1) \cong -90° - 53{,}1° = -143{,}1° \\ \varphi_m \cong 180° - 143{,}1° = 36{,}9° \end{cases}$$

e la specifica risulta soddisfatta.
Per la stima del tempo di assestamento ad uno scalino, possiamo stimare la funzione di trasferimento dell'anello chiuso come:

$$F(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_c}s + \frac{1}{\omega_c^2}s^2}$$

dato il basso margine di fase. Si stima:

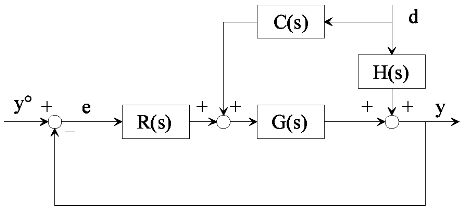
$$\xi \cong \frac{\varphi_m}{100°} \cong 0,37$$

pertanto il tempo di assestamento è stimabile come:

$$T_a \cong \frac{5}{\omega_c \xi} \cong 13,5$$

PROBLEMA 15

Si consideri il seguente sistema di controllo:



in cui:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)};\ R(s) = 10;\ H(s) = \frac{1}{s+2}$$

1) Posto $C(s) = k$, determinare k in modo che un disturbo $d(t) = 2\mathrm{sca}(t)$ abbia effetto nullo a transitorio esaurito sull'uscita y.
2) Determinare un'espressione della funzione di trasferimento del compensatore $C(s)$ in modo che il sistema nel suo complesso sia asintoticamente stabile e che un disturbo $d(t) = 2\sin(t)$ abbia effetto nullo a transitorio esaurito sull'uscita y.

SOLUZIONE

Sia in anello chiuso che in anello aperto, un compensatore ideale dovrebbe essere tale che:

$$H(s) + C(s)G(s) = 0 \Rightarrow C(s) = -\frac{H(s)}{G(s)}$$

tuttavia non è possibile fare questo, perciò si cercherà di volta in volta che la relazione sia soddisfatta almeno per la pulsazione che interessa. Nel primo caso, dato che il compensatore sarà solo un guadagno, si ha che:

$$k = C(s) = -\frac{H(0)}{G(0)} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}$$

Nel secondo caso, bisognerà avere una funzione di trasferimento che verifichi la relazione:

$$C(j) = -\frac{H(j)}{G(j)} \Rightarrow \begin{cases} \arg(C(j)) = -180° - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \cong -143,1° \\ |C(j)| = 2 \end{cases}$$

per quanto riguarda la stabilità, essa (se il compensatore è di suo stabile) coinciderà con la stabilità dell'anello di regolazione principale, che si può verificare essere già stabile. Pertanto si può provare con un compensatore di questo tipo ("filtro passatutto"):

$$C(s)=\mu\frac{1-s\tau}{1+s\tau}\Rightarrow\begin{cases}-143{,}1^\circ=-2\arctan(\tau)\Rightarrow\tau=\tan(71{,}6^\circ)\cong 3\\ 2=\mu\frac{\sqrt{1+3^2}}{\sqrt{1+3^2}}\Rightarrow\mu=2\end{cases}$$

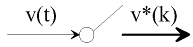
e quindi:

$$C(s)=2\frac{1-3s}{1+3s}$$

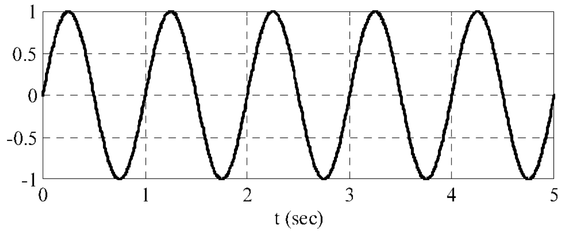
E' asintoticamente stabile quindi va bene come soluzione.

PROBLEMA 16

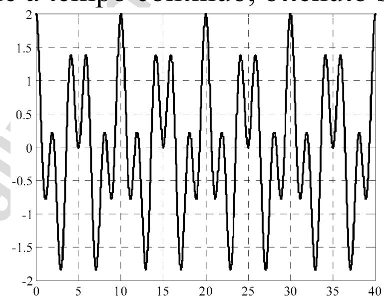
Si consideri un campionatore ideale, con periodo di campionamento T:



1) Scrivere la relazione che intercorre tra la trasformata di Fourier del segnale di ingresso e la trasformata di Fourier del segnale di uscita.
2) Si campioni il seguente segnale sinusoidale con un periodo di campionamento scelto in modo tale da mettere in evidenza il fenomeno dell'aliasing (ci si limiti a segnare i campioni nella figura).



3) Enunciare il teorema di Shannon.
4) Considerando il seguente segnale a tempo continuo, ottenuto sommando due sinusoidi:



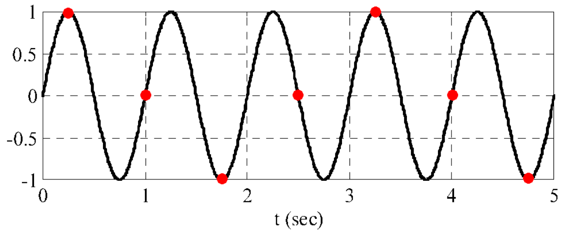
determinare il massimo valore del periodo di campionamento per la conversione analogico/digitale corretta (senza aliasing) del segnale.

SOLUZIONE

La relazione che dà la trasformata del segnale a tempo discreto a partire da quella del segnale a tempo continuo è:

$$F^*\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{T}F_s(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{h=-\infty}^{+\infty}F\left(j\left(\omega+h\frac{2\pi}{T}\right)\right)$$

Scegliendo un tempo di campionamento pari a ¾ del periodo, il segnale proposto appare avere un periodo tre volte maggiore, come mostrato in figura:



Il teorema di Shannon afferma che se un segnale a tempo continuo a banda limitata (con massima pulsazione dello spettro pari a $\overline{\omega}$) viene campionato con un tempo di campionamento T, è possibile risalire esattamente al segnale originario da quello campionato se e solo se $\overline{\omega} < \Omega_N$, dove Ω_N è la "pulsazione di Nyquist" che è definita come:

$$\Omega_N = \frac{\pi}{T}$$

Alla luce di tutto ciò, si può stimare il minimo tempo di campionamento del segnale presentato in figura. L'armonica a pulsazione maggiore sembra avere periodo 2, in quanto in 10 s compie 5 cicli. Pertanto:

$$\overline{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

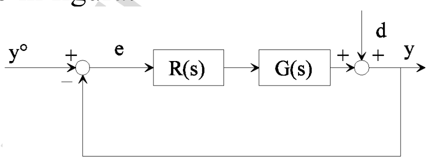
e il teorema di Shannon richiede che:

$$\overline{\omega} = \pi < \Omega_N = \frac{\pi}{T} \Rightarrow T < 1$$

Il minimo tempo di campionamento necessario per non avere equivocazione in frequenza del segnale è dunque 1.

PROBLEMA 17

Si consideri il sistema di controllo in figura:



dove:

$$G(s) = \frac{15}{s(1+s)(1+0{,}2s)}$$

1) Determinare la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- in presenza di un segnale di riferimento $y°(t) = A\text{sca}(t)$, con A costante arbitraria, e di un disturbo $d(t) = \sin(0{,}2t)$, l'errore a transitorio esaurito sia minore di 0,1;
- il margine di fase sia maggiore o uguale a 40° e la pulsazione critica sia maggiore o uguale a 2 rad/s.

Si supponga ora che la funzione di trasferimento del processo sotto controllo sia in realtà affetta da un ritardo di tempo:

$$G(s) = \frac{15}{s(1+s)(1+0{,}2s)} e^{-s\tau}$$

2) Determinare il massimo valore che può assumere il ritardo τ perché il sistema in anello chiuso con il regolatore progettato sopra rimanga asintoticamente stabile.

SOLUZIONE

La funzione cercata sarà posta:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s)$$

dove la prima soddisferà il progetto statico e la seconda il progetto dinamico.
Per la condizione sull'errore, ci sarà da compensare sia l'errore dovuto al riferimento, sia quello dovuto al disturbo. Data l'arbitrarietà della costante A, bisognerà imporre l'errore sul riferimento come nullo:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0}\left(s\frac{A}{s}\frac{1}{1+R_1(s)G(s)}\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{A}{1+15\dfrac{\mu_R}{s^{g_R+1}}}\right) = 0 \text{ se } g_R = 0$$

e il guadagno non viene vincolato.
La funzione di trasferimento del disturbo in linea d'andata è:

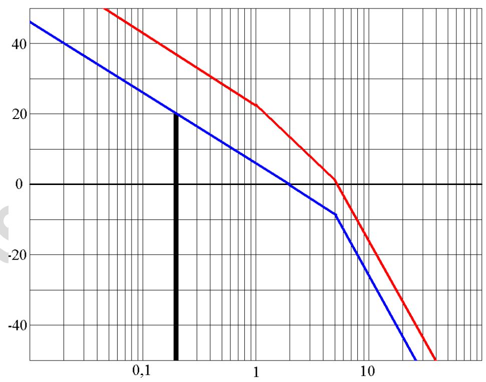
$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{1}{1+L(s)}$$

la richiesta fatta si traduce dunque in:

$$\left|\frac{1}{1+L(0{,}2j)}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \text{(approssimando)} \left|L(0{,}2j)\right| > 10$$

condizione che si cercherà poi di rispettare in fase di progetto dinamico.
Si disegna il diagramma di Bode della funzione:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = G(s) = \frac{15}{s(1+s)(1+0.2s)} \text{ (in rosso)}$$



La linea rossa taglia l'asse a zero decibel in una zona a pendenza –3, quindi non va bene; si può fare un tentativo con una funzione d'anello che tagli proprio in 2 rad/s a pendenza –1, che oltretutto schiva la zona interdetta dalle specifiche sulla reiezione del disturbo (tratto nero spesso).

$$L_1(s) = \frac{10}{s(1+0{,}2s)^2} \text{ (in blu)}$$

$$\begin{cases} \omega_c \cong 2 \\ \varphi_c \cong -90° - 2\arctan(2\cdot 0{,}2) \cong -90° - 43{,}6° = -133{,}6° \\ \varphi_m \cong 180° - 133{,}6° = 46{,}4° \end{cases}$$

Le specifiche sono soddisfatte, pertanto non resta che ricavare la funzione di trasferimento del regolatore:

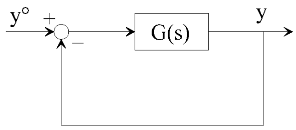
$$R(s)=\frac{L(s)}{G(s)}=\frac{2}{3}\frac{(1+s)}{s(1+0.2s)}$$

Il ritardo di tempo non fa nient'altro che diminuire il margine di fase; pertanto dovrà essere che:

$$\varphi_m-\frac{180°}{\pi}\tau\omega_c>\Rightarrow\tau<\frac{\pi\varphi_m}{180°\omega_c}\cong 0{,}40$$

PROBLEMA 18

Si consideri il seguente sistema in retroazione:



dove:

$$G(s)=\rho\frac{s-1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

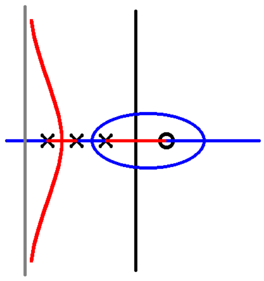
1) Tracciare il luogo delle radici di $G(s)$.
2) Sulla base del luogo tracciato, determinare i valori di ρ per cui il sistema è asintoticamente stabile in anello chiuso.

SOLUZIONE

Il luogo ha 3 rami per il luogo inverso e tre per quello diretto, e quattro asintoti che si incrociano nel punto:

$$x_A=\frac{-1-1-2-3}{2}=-\frac{7}{2}$$

non servono altre indicazioni, per cui si può tracciare (in rosso il diretto, in blu l'inverso):



Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se non ci sono radici a parte reale positiva. Pertanto per la seconda richiesta si ricorre alla formula di punteggiatura: per la parte diretta, basterà punteggiare il punto nell'origine:

$$\rho_{MAX}=\left|\frac{1\cdot 2\cdot 3}{-1}\right|=6$$

Per il luogo inverso è meno facile dato che non si riesce a capire bene dove esso attraversi l'asse immaginario. Però è noto che se il grado relativo è maggiore o uguale a due, come in questo caso, il "baricentro" del luogo rimane costante; pertanto invece di punteggiare il punto a parte reale nulla, basterà punteggiare quello in –6 (infatti la somma delle parti reali delle radici coincide con la somma dei poli).

$$\rho_{MIN} = -\left|\frac{(-6+1)(-6+2)(-6+3)}{-6-1}\right| \cong -8{,}57$$

Per cui il sistema sarà asintoticamente stabile in anello chiuso quando:

$$-8{,}57 < \rho < 6$$

PROBLEMA 19

Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{z+2}{z(z+1)(2z+1)}$$

1) Determinare il guadagno di $G(z)$.
2) Determinare il tipo di $G(z)$.
3) Discutere la stabilità del sistema.
4) Dire se il sistema è a fase minima o no.
5) Determinare i primi 5 campioni della risposta allo scalino unitario.

SOLUZIONE

Guardando la funzione si vede che il tipo è zero (nessun polo o zero nel punto 1); il guadagno è il valore della funzione in uno, che si rileva essere ½. Il sistema è semplicemente stabile data la presenza del polo in –1 (il cui indice è sicuramente 1 in quanto ha molteplicità algebrica 1). Il sistema non è a fase minima.
Per trovare i primi 5 campioni della risposta allo scalino, se ne scrive la trasformata zeta:

$$Y(s) = G(z)\frac{z}{z-1} = \frac{z+2}{(z-1)(z+1)(2z+1)} = \frac{z+2}{2z^3+z^2-2z-1}$$

ci attende dunque una lunga divisione:

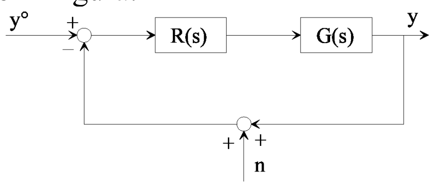
$$
\begin{array}{llllll|l}
z & +2 & & & & & 2z^3 \quad +z^2 \quad -2z \quad -1 \\
\hline
z & +2 & & & & & \frac{1}{2}z^{-2} \quad +\frac{3}{4}z^{-3} \quad \frac{1}{4}z^{-4} \\
-z & -\frac{1}{2} & +z^{-1} & +\frac{1}{2}z^{-2} & & & \\
\hline
 & \frac{3}{2} & +z^{-1} & +\frac{1}{2}z^{-2} & & & \\
 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4}z^{-1} & +\frac{3}{2}z^{-2} & +\frac{3}{4}z^{-3} & & \\
\hline
 & & \frac{1}{4}z^{-1} & \ldots & \ldots & &
\end{array}
$$

i campioni richiesti sono dunque:

tempo	0	1	2	3	4
campione	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

PROBLEMA 20

Si consideri il sistema di controllo in figura:



dove:

$$G(s) = \frac{100}{s} \frac{1 - 0{,}1s}{1 + s}$$

1) Determinare la funzione di trasferimento del regolatore tale che:
- un disturbo n, trasformabile secondo Fourier, avente componenti armoniche significative solo a pulsazioni maggiori di $\overline{\omega} = 10$ rad/s, sia attenuato all'uscita y almeno d'un fattore 10;
- Il margine di fase sia maggiore o uguale a 40° e la pulsazione critica maggiore o uguale a 2 rad/s.

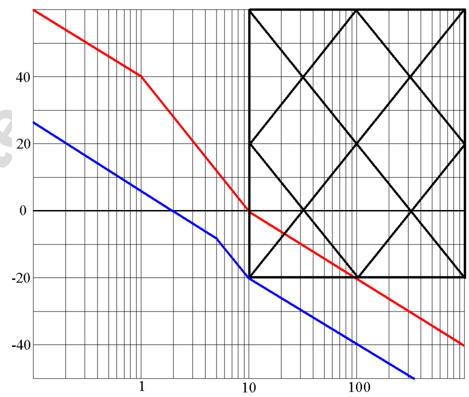
2) Determinare un valore adeguato del tempo di campionamento per la corretta realizzazione digitale del controllore.

SOLUZIONE

Tra le specifiche del regolatore non ci sono indicazioni sulla risposta allo scalino del riferimento, che comunque avrà errore nullo a transitorio esaurito dato il tipo 1 del sistema. Per la reiezione del disturbo, sarà:

$$\left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| < \frac{1}{10} \Rightarrow L(j\omega) < 10 \text{ (circa) per } \omega > \overline{\omega}$$

Si fa un primo tentativo con un regolatore proporzionale con guadagno 1, di cui si traccia il grafico di Bode (in rosso) che coincide con quello di G:



La zona bordata di nero rappresenta la "zona interdetta" da evitare per la reiezione del disturbo in linea di ritorno. Si può fare un tentativo di funzione d'anello come quello raffigurato in blu, tenendo presente che lo zero positivo non va assolutamente cancellato (ma forse fa anche comodo):

$$L(s) = \frac{2}{s} \frac{1 - 0{,}1s}{1 + 0{,}2s}$$

$$\begin{cases} \omega_c \cong 2 \\ \varphi_c \cong -90° - \arctan(2 \cdot 0{,}1) - \arctan(2 \cdot 0{,}2) \cong -90° - 11{,}3° - 21{,}8° = -123{,}1° \\ \varphi_m \cong 180° - 123{,}1° = 56{,}9° \end{cases}$$

va più che bene, pertanto si ricava:

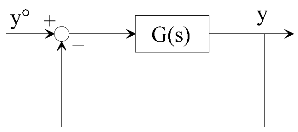
$$R(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = 0{,}02\frac{1+s}{1+0{,}2s}$$

Dato che $\omega_c = 2,$ si dovrà avere:

$$\Omega_N = 10\omega_c = 20 \Rightarrow T = \frac{\pi}{20} \cong 0{,}157$$

PROBLEMA 21

Si consideri un generico sistema di controllo:



1) Spiegare che cosa si intende per “diagramma di Nyquist” associato a *G*.
2) Enunciare il criterio di Nyquist.

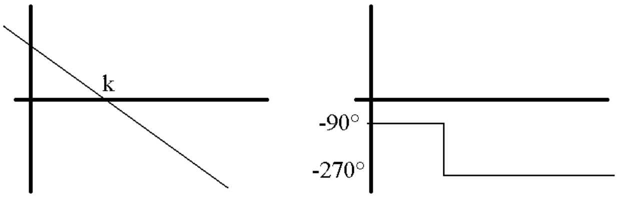
Si consideri:

$$G(s) = \frac{k}{s}\frac{1-s}{1+s} \text{ con } k > 0$$

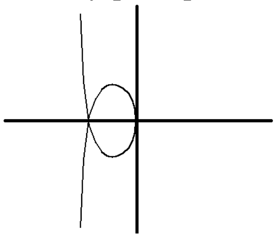
3) Determinare col criterio di Nyquist testé enunciato l’insieme dei valori di *k* per cui il sistema è asintoticamente stabile in anello chiuso.

SOLUZIONE

Il diagramma di Nyquist è una mappa sul piano complesso delle immagini dei punti del “percorso di Nyquist” attraverso una data funzione di trasferimento. Il “percorso di Nyquist” è l’asse immaginario, percorso da meno infinito a più infinito, con l’accortezza di “scartare sulla destra” percorrendo semicirconferenze infinitesime eventuali poli immaginari puri della funzione di trasferimento.
Si definiscono:
P: numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento;
N: numero di giri del diagramma di Nyquist attorno al punto –1, in verso positivo se antiorari (si dice “non ben definito” se il diagramma passa per -1);
Il criterio di Nyquist afferma che un sistema è asintoticamente stabile in anello chiuso (con retroazione negativa) se e solo se *N* è ben definito e *N* = *P*.
Per tracciare il diagramma di Nyquist della funzione proposta conviene prima abbozzare i diagrammi di Bode di modulo e fase:



da cui è ora banale ricavare il diagramma di Nyquist qualitativo:



bisognerà ricavare la pulsazione per cui il grafico tocca l'asse reale negativo, e porre il modulo della funzione di trasferimento minore di uno in tale pulsazione.

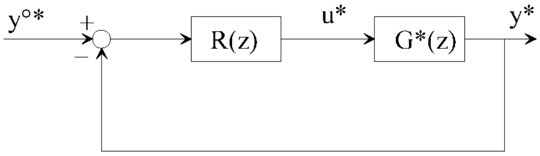
$$-180° = -90° - 2\arctan(\omega_\pi) \Rightarrow \omega_\pi = 1$$

$$\left|G(j\omega_\pi)\right| = \left|\frac{k}{j}\frac{1-j}{1+j}\right| = k < 1$$

Quindi k dovrà essere minore di 1.

PROBLEMA 22

Con riferimento al seguente sistema di controllo:



in cui:

$$G^*(z) = \frac{2z+1}{z^2 - 2z}$$

1) Determinare la funzione di trasferimento $R(z)$ del regolatore in modo che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile, la risposta di y^* allo scalino in $y°^*$ non presenti errore a regime e si esaurisca in tempo finito e minimo.
2) Discutere la stabilità del regolatore progettato.

SOLUZIONE

Si utilizza allo scopo proposto il metodo di Ragazzini. È meglio riscrivere la funzione in modo da evidenziarne i poli:

$$G^*(z) = \frac{2z+1}{z(z-2)}$$

Il polo in 2 è problematico perché non andrà cancellato. La F^* dovrà avere grado relativo almeno 1 (come G^*), una condizione sul guadagno statico ed una condizione per la conservazione del polo, pertanto sarà del tipo:

$$F^*(z)=a\frac{z-b}{z^2}$$

si impongono le condizioni:

$$\begin{cases} F^*(1)=a\dfrac{1-b}{1}=1 \\ F^*(2)=a\dfrac{2-b}{4}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-ab=1 \\ 2a-ab=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow F^*(z)=\frac{3z-2}{z^2}$$

per cui:

$$R(z)=\frac{F^*(z)}{G^*(z)(1-F^*(z))}=\frac{\dfrac{3z-2}{z^2}}{\dfrac{2z+1}{z^2-2z}\left(1-\dfrac{3z-2}{z^2}\right)}=\frac{(3z-2)(z^2-2z)}{(2z+1)(z^2-3z+2)}=\frac{(3z-2)z(z-2)}{(2z+1)(z-2)(z-1)}\Rightarrow$$

$$R(z)=\frac{(3z-2)z}{(2z+1)(z-1)}$$

Il regolatore è semplicemente stabile dato il polo in 1.