ESERCIZI
di
AERODINAMICA

a cura di
Paolo Massioni
pmassio@hotmail.com

disponibile in rete all'indirizzo
http://pmassio.altervista.org

Coordinate

Cartesiane:

$\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ sono i tre versori dello spazio cartesiano.

$$d\vec{l} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$$

$$dV = dx\,dy\,dz$$

$$\vec{\nabla} t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Sferiche:

$\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ sono i tre versori dello spazio.

$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + rd\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,\hat{\phi}$$

$$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$\vec{\nabla} t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,v_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,v_\phi\right) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r v_\phi\right)\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_\phi\right) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\hat{\phi}$$

$$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2}$$

Cilindriche:

$\hat{r}$, $\hat{z}$ e $\hat{\phi}$ sono i tre versori dello spazio.

$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + sd\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$$

$$dV = r\,dr\,dz\,d\phi$$

$$\vec{\nabla} t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r v_\phi \right) - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) \hat{z}$$

$$\nabla^2 t = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

ESERCIZIO 1

Si risolva l'equazione di Laplace per il potenziale cinetico nel seguente dominio piano:

$$x \in [0;+\infty);\ y \in (-\infty;+\infty)$$

con le condizioni al contorno:

$$\varphi(0,y) = \delta(y) \text{ (delta di Dirac)}$$

potenziale convergente all'infinito

SOLUZIONE

L'equazione di Laplace nel dominio considerato è:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0\,.$$

Si ipotizza l'esistenza di una soluzione elementare del tipo:

$\varphi^*(x,y) = X(x)Y(y)$

per cui si ha:

$$\frac{\partial^2(XY)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(XY)}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

nell'ultima espressione si ha la somma di due funzioni indipendenti uguali a zero. Questo è possibile solo se entrambe sono costanti reali a somma nulla, per cui l'equazione diventa:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dx^2} = k \\ \dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dx^2} = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2X}{dx^2} - kX = 0 \\ \dfrac{d^2Y}{dx^2} + kY = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} k = 0 \\ X = c_1x + c_2 \Rightarrow \varphi^* = (c_1x + c_2)(c_3y + c_4) \\ Y = c_3y + c_4 \end{cases} \\ \begin{cases} k \neq 0 \\ X = A_1e^{ax} + A_2e^{-ax} \Rightarrow \varphi^* = C(a)e^{\pm ax}e^{\pm aiy} \\ Y = A_3e^{aiy} + A_4e^{-aiy} \end{cases} \end{array}$$

dove a è reale o immaginario puro ($a^2 = k$).

Le soluzioni complessive possono essere dunque espresse come combinazione lineare di termini del tipo:

$$\begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \\ (c_1x + c_2)(c_3y + c_4) & e^{\pm ax}e^{\pm aiy} & e^{\pm aix}e^{\pm ay} \end{array}$$

dove ora a è reale e positivo.

Nel caso considerato, non tutte le soluzioni sono accettabili; andranno scartate le soluzioni che tenderanno a infinito per x o y che tendono a infinito:

- x può tendere a $+\infty$: va scartata la soluzione lineare (1) e dal termine (2) andrà tolta la possibilità che l'esponenziale consentente x sia moltiplicato per un coefficiente positivo;
- y può tendere a $\pm\infty$: il termine (3) va scartato interamente perché contiene un esponenziale reale in y.

La soluzione generica valida sarà dunque un integrale su a dei termini validi, moltiplicati per un coefficiente:

$$\varphi(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}C(a)e^{-|a|x}e^{aiy}da\,.$$

Ora si può applicare l'ultima condizione al contorno (di Dirichelet):

$$\varphi(0,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}C(a)e^{-|a|0}e^{aiy}da=\int_{-\infty}^{+\infty}C(a)e^{aiy}da=\delta(y)$$

dalla formula per l'inversione delle trasformate di Fourier si ottiene:

$$C(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(y)e^{-aiy}dy=\frac{1}{2\pi}e^{-aiy}\Big|_{y=0}=\frac{1}{2\pi}$$

Sostituendo nell'espressione del potenziale e risolvendo:

$$\varphi(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-|a|x}e^{aiy}da=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{ax}e^{aiy}da+\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}e^{aiy}da\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{a(x+iy)}da+\int_{0}^{+\infty}e^{a(-x+iy)}da\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{x+iy}\left[e^{a(x+iy)}\right]_{-\infty}^{0}+\frac{1}{-x+iy}\left[e^{a(-x+iy)}\right]_{0}^{+\infty}\right)$$

poiché $x > 0$, i termini esponenziali valutati all'infinito si annullano, per cui:

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{x+iy}-\frac{1}{-x+iy}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

Il risultato è dunque reale, come ci si poteva aspettare, essendo il problema trattato di natura fisica e non pura speculazione matematica.

NOTA: l'espressione trovata del potenziale:

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

corrisponde a quella di una "doppietta" (o dipolo) posto nell'origine e orientato secondo il verso positivo dell'asse *x*.

ESERCIZIO 2

Si risolva l'equazione di Laplace per il potenziale cinetico nel seguente dominio piano:

$$x\in(-\infty;+\infty);\ y\in[0;1]$$

con le condizioni al contorno:

$$\varphi(x,0)=\delta(x)\ \text{(delta di Dirac)}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,1)=0$$

potenziale convergente all'infinito

SOLUZIONE

L'equazione di Laplace nel dominio considerato è:

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\,.$$

La soluzione più generica è costituita da una combinazione lineare di termini del tipo:

$$\begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \\ (c_1 x + c_2)(c_3 y + c_4) & e^{\pm ax} e^{\pm aiy} & e^{\pm aix} e^{\pm ay} \end{array}$$

dove ora a è reale e positivo (per la trattazione completa si veda l'esercizio 1).

Nel caso considerato, non tutte le soluzioni sono accettabili; andranno scartate le soluzioni che tenderanno a infinito per x che tende a infinito:

- x può tendere a $\pm\infty$: va scartata la soluzione lineare (1) e il termine (2) va scartato interamente perché contiene un esponenziale reale in x.

La soluzione generica valida sarà dunque un integrale su a dei termini validi, moltiplicati per dei coefficienti:

$$\varphi(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(C_1(a) e^{aix} e^{ay} + C_2(a) e^{aix} e^{-ay} \right) da \ .$$

Ora si può applicare la prima condizione al contorno (di Dirichelet):

$$\varphi(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(C_1(a) e^{aix} e^{a0} + C_2(a) e^{aix} e^{-a0} \right) da = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(C_1(a) + C_2(a) \right) e^{aix} da = \delta(x)$$

dalla formula per l'inversione delle trasformate di Fourier si ottiene:

$$C_1(a) + C_2(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-aix} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-aix} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2\pi}$$

si ha quindi una prima condizione sui due coefficienti.

Si applica quindi la seconda condizione (di Neumann):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(a C_1(a) e^{aix} e^{a} - a C_2(a) e^{aix} e^{-a} \right) da = 0$$

dalla formula per l'inversione delle trasformate di Fourier si ottiene:

$$a C_1(a) e^{a} - a C_2(a) e^{-a} = 0 \Rightarrow C_1(a) e^{a} = C_2(a) e^{-a}$$

(si ricordi: $a \neq 0$, poiché a deriva dalla k dell'equazione di Laplace – si veda eventualmente l'esercizio 1) e si ha quindi una seconda condizione sui due coefficienti.

Recuperando le condizioni trovate si ha:

$$\begin{cases} C_1(a) + C_2(a) = \dfrac{1}{2\pi} \\ C_1(a) e^{a} = a C_2(a) e^{-a} \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} C_1(a) = \dfrac{1}{2\pi\left(e^{2a} + 1\right)} \\ C_2(a) = \dfrac{1}{2\pi\left(e^{-2a} + 1\right)} \end{cases}$$

e sostituendo nell'espressione del potenziale si ha la soluzione cercata:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{ay}}{2\pi\left(e^{2a} + 1\right)} + \frac{e^{-ay}}{2\pi\left(e^{2a} + 1\right)} \right) e^{aix} da$$

che non è risolvibile in forma chiusa ma solo numericamente.

ESERCIZIO 3

Si risolva con il metodo della separazione delle variabili l'equazione di Laplace per il potenziale cinetico nel caso delle coordinate sferiche.

SOLUZIONE

E’ nota l’espressione del laplaciano in coordinate sferiche:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0$$

Si ipotizza l’esistenza di una soluzione elementare del tipo:

$$\varphi^*(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

per cui si ha:

$$\frac{\Theta\Phi}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{R\Phi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \frac{R\Theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = 0$$

si divide per $R\Theta\Phi$ e si moltiplica per r^2; le derivate parziali diventano derivate totali data la dipendenza delle funzioni argomento delle derivate da una sola variabile:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0$$

Rimaneggiando l’espressione si può scrivere:

$$\underbrace{\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}_{\substack{\text{termine dipendente}\\ \text{dalla sola } r}} = \underbrace{-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)}_{\substack{\text{termine dipendente}\\ \text{dalla sola } \theta}} \quad \underbrace{-\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}}_{\substack{\text{termine dipendente}\\ \text{da } \theta \text{ e } \phi}}$$

Una funzione che dipende solo da r può essere uguale a una funzione che non dipende da r solo se tale funzione è costante. Pertanto si pone:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = A$$

L’altra parte dell’equazione diventa:

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -A$$

Moltiplicando per $\sin^2\theta$ e rimaneggiando i termini si ha:

$$\underbrace{\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)}_{\substack{\text{termine dipendente}\\ \text{dalla sola } \theta}} \quad \underbrace{+A\sin^2\theta}_{\substack{\text{termine dipendente}\\ \text{dalla sola } \theta}} = \underbrace{-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}}_{\substack{\text{termine dipendente}\\ \text{dalla sola } \phi}}$$

Ancora una volta, una funzione che dipende solo da θ può essere uguale a una funzione che non dipende da θ solo se tale funzione è costante. Pertanto segue che:

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + A\sin^2\theta = m$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = m$$

Il sistema complessivo delle equazioni viene dunque ad essere:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right)=A \\ \dfrac{1}{\Theta\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right)+A\sin^2\theta=m \\ \dfrac{1}{\Phi}\dfrac{d^2\Phi}{d\phi^2}=m \end{cases}$$

La trattazione delle soluzioni della seconda equazione è piuttosto complicata; si sappia che il risultato consiste nei cosiddetti “polinomi di Legendre” in $\cos\theta$, che sono descrivibili con la formula di Rodrigues; se ne scrivono i primi tre a titolo di esempio:

$$P_0(\cos(\theta))=1$$
$$P_1(\cos(\theta))=\cos\theta$$
$$P_2(\cos(\theta))=\frac{3\cos^2\theta-1}{2}$$

Un altro risultato di questa analisi è che si hanno soluzioni solo per valori di $A = n(n - 1)$, con n naturale. Pertanto la prima equazione diventa:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-AR=0\Rightarrow r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-n(n-1)R=0$$

che si risolve con il cambio di variabile di Eulero:

$$r=e^t\Rightarrow dr=rdt\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{d}{dr}=\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt} \\ \dfrac{d^2}{dr^2}=\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\right)=\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(e^{-t}\dfrac{d}{dt}\right)=-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dt}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d^2}{dt^2}\end{cases}$$

e quindi:

$$\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{dR}{dt}-n(n-1)R=0$$

si procede calcolando la radice del polinomio caratteristico:

$$\lambda^2+\lambda-n(n-1)=0\Rightarrow\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1+4n^2+4n}}{2}=\frac{-1\pm(2n+1)}{2}=\begin{cases}n \\ -n-1\end{cases}$$

si trovano le soluzioni, esprimibili come:

$$R(r)=ae^{nt}+be^{-(n+1)t}=ar^n+br^{-n-1}$$

La soluzione della terza equazione differenziale (quella in ϕ) non presenta particolari difficoltà: le soluzioni saranno degli esponenziali.

Scrivendo quindi la soluzione elementare, essa sarà della forma:

$$\varphi^*(r,\theta,\phi)=R(n,r)\Theta(\theta,m,n)\Phi(\phi,m)$$

e si può arrivare a dimostrare che la soluzione generale sarà:

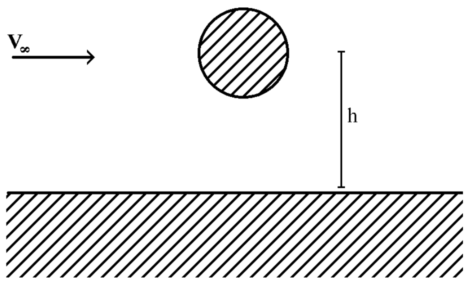
$$\varphi(r,\theta,\phi)=\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}\left(\gamma(n,m)\mathcal{P}(n,m,\theta,\phi)r^{|n|}+\delta(n,m)\mathcal{Q}(n,m,\theta,\phi)r^{-|n|-1}\right)\quad \text{con } m,n\in\mathrm{Z}$$

dove $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ sono funzioni che includono in sé i polinomi di Legendre e le soluzioni in ϕ. La cosa importante da notare è che i termini che sono moltiplicati per i coefficienti γ "scoppiano" nei problemi esterni (quando r tende a infinito), mentre quelli moltiplicati dal δ "scoppiano" nei problemi interni (per r che tende a 0). Inoltre, si nota che anche in coordinate sferiche sarà possibile sfruttare il metodo delle immagini; ad esempio:

se $\varphi(r)$ è soluzione del problema interno $\Rightarrow \varphi'(r) = \frac{1}{r}\varphi\left(\frac{1}{r}\right)$ è soluzione di un problema esterno.

ESERCIZIO 4

Illustrare come sia possibile risolvere, con il metodo delle immagini, il problema bidimensionale di una corrente uniforme che investe un cilindro, con una parete parallela alla corrente asintotica distante h dal centro del cilindro (si supponga l'origine degli assi nel centro del cilindro).



SOLUZIONE

E' noto che sommando un potenziale e il suo potenziale immagine (rispetto alle coordinate polari) si rispetta la condizione di Neumann di non penetrazione sul cilindro di raggio R; infatti:

$$\text{se } \varphi(r) \text{ è soluzione } \Rightarrow \varphi'(r) = \varphi\left(\frac{R^2}{r}\right) \text{ è soluzione}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\varphi + \varphi') = \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} + \frac{\partial \varphi\left(\frac{R^2}{r}\right)}{\partial r} = \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} + \frac{\partial \varphi\left(\frac{R^2}{r}\right)}{\partial\left(\frac{R^2}{r}\right)} \frac{\partial\left(\frac{R^2}{r}\right)}{\partial r} = \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} - \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial \varphi\left(\frac{R^2}{r}\right)}{\partial\left(\frac{R^2}{r}\right)}$$

che è nullo nel caso di $r = R$, poiché:

$$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} = \frac{\partial \varphi\left(\frac{R^2}{r}\right)}{\partial\left(\frac{R^2}{r}\right)}$$

Allo stesso modo, sommando ad un potenziale (in coordinate cartesiane) un potenziale simmetrico rispetto ad un asse, si avrà rispetto della condizione di Neumann di non penetrazione sull'asse stesso. Si pensi, per capire meglio questo concetto, che in corrispondenza dell'asse le componenti di velocità normale si cancelleranno sommandosi, in quanto uguali in modulo e di verso opposto.

Il metodo per trovare la soluzione al problema proposto consiste in una serie (convergente) di iterazioni:

1)

$\varphi_\infty(r,\theta)$ è il potenziale della corrente asintotica $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_1(r,\theta) = \varphi_\infty(r,\theta) + \varphi_\infty\left(\frac{R^2}{r},\theta\right)$ rispetta la condizione sul cilindro.

2)

$\varphi_1(r,\theta) = \varphi_1(x,y)$ (si cambiano le coordinate) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_2(x,y) = \varphi_1(x,y) + \varphi_1(x,2h-y)$ rispetta la condizione sulla parete.

Si pensi che $y' = 2h - y$ è l'equazione della simmetria rispetto all'asse $y = -h$. La nuova soluzione tuttavia non rispetta più la condizione sul cilindro! E' necessario quindi un altro passo:

3)

$\varphi_2(x,y) = \varphi_2(r,\theta)$ (si cambiano le coordinate) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_3(r,\theta) = \varphi_2(r,\theta) + \varphi_2\left(\frac{R^2}{r},\theta\right)$ rispetta la condizione sul cilindro.

Ancora: la nuova soluzione non rispetta più la condizione sulla parete! E' necessario quindi un altro passo, simile al passo 2.

Tutti i passi pari sono uguali fra loro, così come tutti i passi dispari. Il metodo porta quindi alla soluzione tramite il calcolo della somma di una serie.

ESERCIZIO 5

Risolvere il problema aerodinamico all'interno del cerchio unitario con la seguente condizioni al contorno:

$$\psi(1,\theta) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < \theta < \pi \\ -1 & \text{per } \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

prima con la formula di Green e poi con quella di Schwarz.

SOLUZIONE

E' nota la formula di Green:

$$\psi(r_0,\theta_0) = \oint\left(\psi(r,\theta)\frac{\partial G(r,\theta,r_0,\theta_0)}{\partial n} - G(r,\theta,r_0,\theta_0)\frac{\partial \psi(r,\theta)}{\partial n}\right)dl$$

Per la soluzione del problema proposto (condizioni di Dirichlet) è necessaria una funzione di Green che si annulli sul contorno; i requisiti di G saranno dunque:

$$\begin{cases} G\big|_{r=1} = 0 \\ \nabla^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \end{cases}$$

Si può dimostrare che la seguente funzione rispetta tali condizioni:

$$G(r,\theta,r_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(r\cos\theta-r_0\cos\theta_0)^2+(r\sin\theta-r_0\sin\theta_0)^2}-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\left(\frac{\cos\theta}{r}-r_0\cos\theta_0\right)^2+\left(\frac{\sin\theta}{r}-r_0\sin\theta_0\right)^2}$$

Nota: l'eventuale funzione di Green per un analogo problema con condizioni di Neumann sarebbe:
$$G(r,\theta,r_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(r\cos\theta-r_0\cos\theta_0)^2+(r\sin\theta-r_0\sin\theta_0)^2}+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\left(\frac{\cos\theta}{r}-r_0\cos\theta_0\right)^2+\left(\frac{\sin\theta}{r}-r_0\sin\theta_0\right)^2}$$

Procedendo dunque con i calcoli, si ha la necessità di calcolare la derivata di *G* che compare nella formula:
$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{\partial G}{\partial r}=\frac{1}{4\pi}\frac{2r\cos^2\theta+2r\sin^2\theta-2r_0\cos\theta\cos\theta_0-2r_0\sin\theta\sin\theta_0}{(r\cos\theta-r_0\cos\theta_0)^2+(r\sin\theta-r_0\sin\theta_0)^2}+$$
$$+\frac{1}{4\pi r^2}\frac{2\frac{1}{r}\cos^2\theta+2\frac{1}{r}\sin^2\theta-2r_0\cos\theta\cos\theta_0-2r_0\sin\theta\sin\theta_0}{\left(\frac{\cos\theta}{r}-r_0\cos\theta_0\right)^2+\left(\frac{\sin\theta}{r}-r_0\sin\theta_0\right)^2}$$
tale derivata è valutata sul contorno, pertanto in $r=1$:
$$\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=1}=\frac{1}{2\pi}\frac{1-r_0\cos\theta\cos\theta_0-r_0\sin\theta\sin\theta_0}{1+r_0^2-2r_0\cos\theta\cos\theta_0-2r_0\sin\theta\sin\theta_0}+\frac{1}{2\pi}\frac{1-r_0\cos\theta\cos\theta_0-r_0\sin\theta\sin\theta_0}{1+r_0^2-2r_0\cos\theta\cos\theta_0-2r_0\sin\theta\sin\theta_0}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\frac{1-r_0\cos\theta\cos\theta_0-r_0\sin\theta\sin\theta_0}{1+r_0^2-2r_0\cos\theta\cos\theta_0-2r_0\sin\theta\sin\theta_0}$$

Inserendo quindi nella formula di Green si ottiene:
$$\psi(r_0,\theta_0)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{1-r_0\cos\theta\cos\theta_0-r_0\sin\theta\sin\theta_0}{1+r_0^2-2r_0\cos\theta\cos\theta_0-2r_0\sin\theta\sin\theta_0}d\theta-\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1-r_0\cos\theta\cos\theta_0-r_0\sin\theta\sin\theta_0}{1+r_0^2-2r_0\cos\theta\cos\theta_0-2r_0\sin\theta\sin\theta_0}d\theta\right)$$
ma tale integrale risulta di difficile soluzione.

E' nota la formula di Schwarz del potenziale complesso per il problema interno:
$$F(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\mathrm{Re}(F(z))\frac{z+z_0}{z-z_0}\frac{dz}{z}$$
Tuttavia la condizione data riguarda la funzione di corrente, pertanto la parte immaginaria del potenziale complesso. Con un banale trucco però ci si può ricondurre alla formula nota: infatti se è vero che:
$$\mathrm{Im}(F)=-\mathrm{Re}(iF)$$
allora si potrà dire che
$$-iF(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\mathrm{Im}(F(z))\frac{z+z_0}{z-z_0}\frac{dz}{z}\Rightarrow F(z_0)=\frac{1}{2\pi}\oint\mathrm{Im}(F(z))\frac{z+z_0}{z-z_0}\frac{dz}{z}$$

Si consideri inoltre che (sul cerchio unitario):

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta} d\theta = izd\theta \Rightarrow \frac{dz}{z} = id\theta$$

Si può procedere dunque all'integrazione:

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{z+z_0}{z-z_0}\frac{dz}{z} - \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{z+z_0}{z-z_0}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z_0}{e^{i\theta}-z_0} id\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z_0}{e^{i\theta}-z_0} id\theta =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{2e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z_0} - 1\right)d\theta - \frac{i}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\left(\frac{2e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z_0} - 1\right)d\theta =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\left[\frac{2}{i}\ln\left(e^{i\theta}-z_0\right) - \theta\right]_0^{\pi} - \frac{i}{2\pi}\left[\frac{2}{i}\ln\left(e^{i\theta}-z_0\right) - \theta\right]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\left(\frac{2}{i}\ln(-1-z_0) - \frac{2}{i}\ln(1-z_0) + \pi - \frac{2}{i}\ln(1-z_0) + \frac{2}{i}\ln(-1-z_0) - \pi\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{-1-z_0}{1-z_0}\right)$$

da cui:

$$\psi(z_0) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\left(\ln\left(\frac{-1-z_0}{1-z_0}\right)\right) = \frac{2}{\pi}\left(\arg(-1-z_0) - \arg(1-z_0)\right)$$

Si noti come con la formula di Schwarz si sia arrivati molto facilmente alla soluzione analitica del problema, cosa che sarebbe stata possibile anche con la formula di Green ma con molta più fatica.

ESERCIZIO 6

Ricavare una funzione di Green bidimensionale che sia utile per condizioni al contorno di Dirichelet (e poi di Neumann) sul cerchio di raggio *R*.

SOLUZIONE

Si parte dalla funzione di Green di spazio libero:

$$G(r,\theta,r_0,\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(r\cos\theta - r_0\cos\theta_0)^2 + (r\sin\theta - r_0\sin\theta_0)^2}$$

Con il noto metodo delle immagini è possibile trovare una soluzione immagine della stessa:

$$G'(r,\theta,r_0,\theta_0) = G\left(\frac{R^2}{r},\theta,r_0,\theta_0\right) = \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\left(\frac{R^2}{r}\cos\theta - r_0\cos\theta_0\right)^2 + \left(\frac{R^2}{r}\sin\theta - r_0\sin\theta_0\right)^2}$$

Sottraendo le due si ottiene una funzione di Green che si annulla sul cerchio, e che sarà buona per condizioni di Dirichlet:

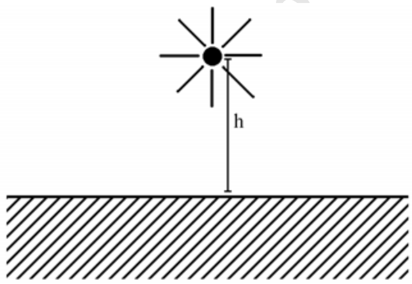
$$G(r,\theta,r_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(r\cos\theta-r_0\cos\theta_0)^2+(r\sin\theta-r_0\sin\theta_0)^2}\,-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\left(\frac{R^2}{r}\cos\theta-r_0\cos\theta_0\right)^2+\left(\frac{R^2}{r}\sin\theta-r_0\sin\theta_0\right)^2}$$

Sommando invece si ottiene una funzione di Green la cui derivata si annulla sul cerchio, per condizioni di Neumann:

$$G(r,\theta,r_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(r\cos\theta-r_0\cos\theta_0)^2+(r\sin\theta-r_0\sin\theta_0)^2}\,+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\left(\frac{R^2}{r}\cos\theta-r_0\cos\theta_0\right)^2+\left(\frac{R^2}{r}\sin\theta-r_0\sin\theta_0\right)^2}$$

ESERCIZIO 7

Si consideri la situazione bidimensionale di una sorgente di portata q positiva posta a distanza h da una parete: la forza subita dalla parete è attrattiva o repulsiva?



SOLUZIONE

Per prima cosa occorre trovare il potenziale della corrente in esame. Si pone la parete coincidente con l'asse X e la sorgente nel punto (0, h).
La soluzione dell'equazione di Laplace che rispetta la condizione di non penetrazione sulla parete è facilmente ottenibile con il metodo delle immagini: basta sommare al potenziale della sola sorgente il potenziale di una sorgente uguale posta simmetricamente rispetto alla parete. In termini di potenziale cinetico questo significa:

$$\varphi_{sorgente}=\frac{q}{2\pi}\ln\sqrt{(y-h)^2+x^2}$$
$$\varphi=\frac{q}{2\pi}\ln\sqrt{(y-h)^2+x^2}+\frac{q}{2\pi}\ln\sqrt{(y+h)^2+x^2}$$

E' come se si fosse aggiunta una soluzione di Laplace per una sorgente posta in (0, - h).

In termini di potenziale complesso si può scrivere:

$$F(z)=\frac{q}{2\pi}\left(\ln(z+ih)+\ln(z-ih)\right)$$

Il calcolo della forza richiede di calcolare la velocità in corrispondenza della parete (per costruzione, ci sarà solo la componente X o reale):

$$u(x,0)=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{y=0}=\left.\frac{q}{2\pi}\left(\frac{x}{(y-h)^2+x^2}+\frac{x}{(y+h)^2+x^2}\right)\right|_{y=0}=\frac{q}{\pi}\frac{x}{h^2+x^2}$$

da cui la pressione, tramite il teorema di Bernoulli nella sua forma più generale:

$$p_\infty+\frac{1}{2}\rho v_\infty^2=p+\frac{1}{2}\rho v^2\Rightarrow p=p_\infty-\frac{1}{2}\rho u^2\ (\text{si ricordi che } v_\infty=0)$$

La forza totale esercitata sulla parete sarà pari all'integrale di tale pressione per la normale lungo la parete stessa; chiaramente data la giacitura della parete la forza sarà solamente verticale. L'integrale conterrebbe il contributo di pressione di p_∞, ma tale contributo non ha senso "fisico", perché deriva solo dal fatto che il dominio della soluzione di Laplace trovata è solo il semipiano positivo. In effetti, da un punto di vista "fisico" si può pensare che sotto la parete ci sia una pressione pari a p_∞ che annulli l'effetto della p_∞ sopra. Pertanto:

$$F_y=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\rho u^2\right)\vec{n}\,dl\right)_y\quad\text{dove } \vec{n}\,dl=i_x dy-i_y dx\ (\text{la normale esce dal fluido})\Rightarrow$$

$$F_y=-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\rho u^2\right)dx=\frac{\rho q^2}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(h^2+x^2)^2}dx=\frac{\rho q^2}{2\pi^2}\left[\frac{\arctan\left(\frac{x}{h}\right)}{2h}-\frac{x}{2(h^2+x^2)}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\rho q^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi}{4h}+\frac{\pi}{4h}\right)\Rightarrow$$

$$F_y=\frac{\rho q^2}{4h\pi}$$

La forza trovata è rivolta verso l'alto: quindi la parete è attratta dalla sorgente, e la sorgente a sua volta è attratta dalla parete ("effetto suolo").

ESERCIZIO 8

Si consideri la situazione bidimensionale di una sorgente di portata q positiva posta nell'origine in una corrente asintotica orizzontale v_∞: determinare l'equazione della curva lungo la quale vale la non penetrazione e, immaginando di sostituirvi una parete solida, verificare che la resistenza è nulla.

SOLUZIONE

Si può subito scrivere il potenziale cinetico e la funzione di corrente della situazione descritta:

$$\begin{cases}\varphi=v_\infty x+\dfrac{q}{2\pi}\ln r\\[2ex]\psi=v_\infty y+\dfrac{q}{2\pi}\theta\end{cases}$$

Data la simmetria del problema rispetto all'asse X, si può ipotizzare che la linea di corrente che finisce nel punto di ristagno e che poi si biforchi descrivendo il contorno solido sia quella che parte da meno infinito coincidente con l'asse X. Si cerca dunque il punto di ristagno, trovando la velocità:

$$\varphi = v_\infty r\cos\theta + \frac{q}{2\pi}\ln r$$

$$\vec{v} = \nabla\varphi = \left(v_\infty\cos\theta + \frac{q}{2\pi r}\right)\hat{r} - v_\infty\sin\theta\,\hat{\theta}$$

che si annulla per

$$\begin{cases}\theta = \pi \\ r = \dfrac{q}{2\pi v_\infty} = a\end{cases}$$

Si individua la linea di corrente corrispondente, e la curva del contorno:

$$\psi = \frac{q}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{q}{2} = v_\infty y + \frac{q}{2\pi}\theta \text{ oppure}$$

$$v_\infty r\sin\theta' - \frac{q}{2\pi}\theta' = 0 \Rightarrow r = \frac{q}{2\pi v_\infty}\frac{\theta'}{\sin\theta'} \text{ ponendo } \theta = \pi - \theta'$$

Facendo tendere θ a 0 e a 2π si trovano i limiti estremi del contorno

$$\frac{q}{2} = v_\infty y + \frac{q}{2\pi}\theta \Rightarrow \begin{cases}\text{se }\theta \to 0 \Rightarrow y \to \dfrac{q}{v_\infty} = h \\ \text{se }\theta \to 0 \Rightarrow y \to -\dfrac{q}{v_\infty} = -h\end{cases}$$

Si tratta di un corpo affusolato che si estende in direzione Y da *–h* a *+h*.

Per il calcolo della forza aerodinamica è necessario valutare la pressione sul contorno, mediante il teorema di Bernoulli nella sua forma più generale:

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2}\left(v_\infty^2 - v^2\right) = p_\infty + \frac{\rho}{2}\left(v_\infty^2 - \left(v_\infty\cos\theta + \frac{q}{2\pi r}\right)^2 + \left(v_\infty\sin\theta\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = p_\infty + \frac{\rho}{2}\left(-\frac{v_\infty q\cos\theta}{\pi r} - \frac{q^2}{4\pi^2 r^2}\right) = p_\infty - \frac{\rho}{2}\left(+\frac{v_\infty q\cos\theta}{\pi r} + \frac{q^2}{4\pi^2 r^2}\right)$$

$$p\big|_{contorno} =_\infty -\frac{\rho}{2}\left(+\frac{v_\infty q\cos\theta}{\pi r} + \frac{q^2}{4\pi^2 r^2}\right)$$

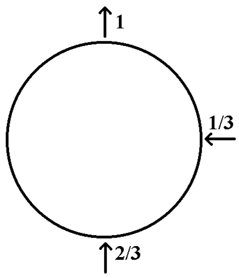
Si integra la pressione per ottenere la forza; si trascura il contributo di p_∞ che non ha significato fisico (si ricordi: *dy = h dθ'*):

$$F_x = \int_{-h}^{+h} \frac{\rho}{2} \left(\frac{v_\infty q \cos\theta'}{\pi \frac{q}{2\pi v_\infty} \frac{\theta'}{\sin\theta'}} - \frac{q^2}{4\pi^2 \frac{q^2}{4\pi^2 v_\infty^2} \frac{\theta'^2}{\sin^2\theta'}} \right) dy = \frac{\rho q v_\infty}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin 2\theta'}{\theta'} - \frac{\sin^2\theta'}{\theta'^2} \right) d\theta' = 0$$

quest'ultimo integrale è calcolabile per via numerica.

ESERCIZIO 9

Si consideri la situazione bidimensionale schematizzata in figura, di portate finite entranti in punti del cerchio unitario. Scrivere le condizioni al contorno e risolvere la corrente all'interno con la formula di Schwarz



SOLUZIONE

La condizione al contorno presentata si può formalizzare come:

$$v_r\big|_{r=1}(r,\theta) = v_r(1,\theta) = \delta(\theta) - \frac{1}{3}\delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{3}\delta\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$$

utilizzando le coordinate polari con origine nel centro del cerchio.

E' noto che:

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = \dfrac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

Pertanto la condizione può diventare:

$$\psi(1,\theta) = \int_0^\theta \left(\delta(\theta') - \frac{1}{3}\delta\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{3}\delta\left(\theta' - \frac{3\pi}{2}\right)\right) d\theta' \Rightarrow \psi(1,\theta) = g(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < \theta < \frac{1}{2}\pi \\ \frac{2}{3} & \text{per } \frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \\ 0 & \text{per } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

E' nota la formula di Schwarz del potenziale complesso per il problema interno:

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \mathrm{Re}(F(z)) \frac{z + z_0}{z - z_0} \frac{dz}{z}$$

Tuttavia la condizione trovata riguarda la funzione di corrente, pertanto la parte immaginaria del potenziale complesso. Con un banale trucco però ci si può ricondurre alla formula nota: infatti se è vero che:

$$\operatorname{Im}(F) = -\operatorname{Re}(iF)$$

allora si potrà dire che

$$-iF(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint \operatorname{Im}(F(z))\frac{z+z_0}{z-z_0}\frac{dz}{z} \Rightarrow F(z_0) = \frac{1}{2\pi}\oint \operatorname{Im}(F(z))\frac{z+z_0}{z-z_0}\frac{dz}{z}$$

Si consideri inoltre che (sul cerchio unitario):

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \Rightarrow \frac{dz}{z} = id\theta$$

Si può procedere dunque all'integrazione:

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\frac{z+z_0}{z-z_0}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\frac{e^{i\theta}+z_0}{e^{i\theta}-z_0}id\theta = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\left(\frac{2e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z_0}-1\right)d\theta =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z_0}-1\right)d\theta + \frac{i}{6\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{2e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z_0}-1\right)d\theta = \frac{5}{12}i + \left[\frac{1}{\pi}\ln\left(e^{i\theta}-z_0\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{3\pi}\ln\left(e^{i\theta}-z_0\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$F(z_0) = \frac{5}{12}i + \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{i-z_0}{1-z_0}\right) + \frac{1}{3\pi}\ln\left(\frac{-i-z_0}{i-z_0}\right)$$

ESERCIZIO 10

Determinare l'espressione del laplaciano in coordinate paraboliche piane:

$$\begin{cases} x = s^2 - t^2 \\ y = 2st \end{cases}$$

Risolvere quindi l'equazione di Laplace nelle sopradette coordinate.

SOLUZIONE

E' necessario procedere alla trasformazione delle derivate seconde:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s}\right) + \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial}{\partial s}\right) + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial}{\partial s}\right)$$

Il calcolo di $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$ e $\frac{\partial t}{\partial y}$ non può essere effettuato direttamente; infatti non si ha l'espressione esplicita di *s* e *t*. Pertanto si dovrà invertire la matrice Jacobiana della trasformazione:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ds \\ dt \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2s & -2t \\ 2t & 2s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ds \\ dt \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ds \\ dt \end{pmatrix} = \frac{1}{2\left(s^2+t^2\right)} \begin{bmatrix} s & t \\ -t & s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

per cui:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{s}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{-t}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{s}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial s}\right) + \frac{-t}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{-t}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{s}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial s}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{t}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{s}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{t}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial s}\right) + \frac{s}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{t}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial s}\right)$$

sommando le derivate per ottenere il laplaciano dei termini vengono semplificati (quelli con le derivate miste):

$$\nabla^2 = \frac{s}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{s}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial s}\right) + \frac{-t}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{-t}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial t}\right) +$$

$$+ \frac{t}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{t}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial s}\right) + \frac{s}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{s}{2\left(s^2+t^2\right)}\left(\frac{s}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{t^2}{2\left(s^2+t^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial s}\right) + \frac{-t}{2\left(s^2+t^2\right)}\left(\frac{-t}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{s^2}{2\left(s^2+t^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial t}\right) +$$

$$+ \frac{t}{2\left(s^2+t^2\right)}\left(\frac{t}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{ts}{2\left(s^2+t^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial s}\right) + \frac{s}{2\left(s^2+t^2\right)}\left(\frac{s}{2\left(s^2+t^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{ts}{2\left(s^2+t^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial t}\right) =$$

$$== \frac{s^2+t^2}{4\left(s^2+t^2\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{s^2+t^2}{4\left(s^2+t^2\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{4\left(s^2+t^2\right)}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$$

La soluzione dell'equazione di Laplace viene ad essere quindi facile quanto quella in coordinate cartesiane:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{4\left(s^2+t^2\right)}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 .$$

Si ipotizza l'esistenza di una soluzione elementare del tipo:

$\varphi^*(s,t) = S(s)T(t)$

per cui si ha:

$$\frac{\partial^2(ST)}{\partial s^2} + \frac{\partial^2(ST)}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow T\frac{d^2S}{ds^2} + S\frac{d^2T}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{S}\frac{d^2S}{ds^2} + \frac{1}{T}\frac{d^2S}{dt^2} = 0$$

La prosecuzione è analoga al caso cartesiano (si veda l'esercizio 1), e porta alla soluzione generale:

$$\varphi(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(C_1(a)e^{as}e^{ait} + C_2(a)e^{-as}e^{ait} + C_3(a)e^{ais}e^{at} + C_4(a)e^{-ais}e^{ait}\right)da + \left(c_1 s + c_2\right)\left(c_3 t + c_4\right)$$

ESERCIZIO 11

Calcolare le caratteristiche del profilo sottile (sull'asse x, tra 0 e 1) definito da:

$$\begin{cases} y_D = -\varepsilon(1-x)^2 \text{ dorso} \\ y_V = -\varepsilon(1-x) \text{ ventre} \end{cases}$$

SOLUZIONE

Si comincia col separare i contributi simmetrici (linea media) e antisimmetrici (spessore):

$$\begin{cases} y_{LM} = \dfrac{y_D + y_V}{2} = -\varepsilon\left(\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x + 2\right) \\ y_{SP} = y_D - y_V = -\varepsilon\left(x^2 - x\right) \end{cases}$$

da cui, tramite i risultati noti, è possibile ottenere la definizione del problema (le velocità sono adimensionali):

$$\begin{cases} v_{LM}(x) = \dfrac{d(y_{LM})}{dx} = -\varepsilon\left(x - \dfrac{3}{2}\right) \\ v_{SP}(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d(y_{SP})}{dx} = -\varepsilon\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \text{per } 0 < x < 1 \qquad \begin{cases} v_{SP}(x) = 0 \\ u_{LM}(x) = 0 \end{cases} \text{per } 0 < x < 1$$

Si esamina per primo il risultato dello spessore. Dalla formula di Hilbert si ha (si ricordi che l'integrale è un integrale in parte principale secondo Cauchy):

$$u_{SP}(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{-v_{SP}(x)}{x - x_0}dx = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^1 \frac{x - \frac{1}{2}}{x - x_0}dx = \frac{\varepsilon}{\pi}\left(\int_0^1 1 + \frac{x_0 - \frac{1}{2}}{x - x_0}\right)dx = \frac{\varepsilon}{\pi}\left(1 + \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)\ln\left|\frac{1 - x_0}{x_0}\right|\right)$$

(la corretta soluzione dell'integrale avrebbe richiesto l'isolamento della singolarità, ma è noto che essa non dà contributo).

L'esame del problema della linea media è più complesso, e richiede, date le condizioni miste, l'uso del metodo di Hilbert, che dà la velocità complessa:

$$w_{LM}(x_0) = \frac{1}{i\pi}\sqrt{\frac{x_0 - 1}{x_0}}\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\frac{-v_{LM}(x)}{x - x_0}dx = \frac{\varepsilon}{\pi}\sqrt{\frac{1 - x_0}{x_0}}\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\frac{x - \frac{3}{2}}{x - x_0}dx$$

dove l'integrale è ancora un integrale in parte principale secondo Cauchy. La soluzione può essere ricavata facilmente con una considerazione sui residui. Dato che la velocità *v* di linea media è simmetrica, tale integrale è esattamente la metà volte l'integrale su percorso chiuso attorno al segmento che va da 0 a 1, compiuto a distanza infinitesima da esso. Pertanto è possibile applicare il teorema dei residui:

$$w_{LM}(x_0) = \frac{\varepsilon}{2\pi}\sqrt{\frac{1 - x_0}{x_0}}\oint \sqrt{\frac{z}{1-z}}\frac{z - \frac{3}{2}}{z - x_0}dz$$

Le singolarità coinvolte sono due, quella in 1 e quella in x_0. Quindi il cammino attorno al profilo può essere separato in due cammini, uno attorno alla prima singolarità ed uno attorno alla seconda. Sviluppando l'integranda si ottiene:

- singolarità in 1:

$$\sqrt{\frac{z}{1-z}}\frac{z-\frac{3}{2}}{z-x_0}=$$

sia $\zeta = 1-z \Rightarrow z = 1-\zeta$

$$=\sqrt{\frac{1-\zeta}{\zeta}}\frac{-\zeta-\frac{1}{2}}{-\zeta+1-x_0}=i\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\zeta-1+x_0\right)^{-1}=i\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{\zeta}\right)\left(1+\frac{x_0-1}{\zeta}\right)^{-1}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{\zeta}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{\zeta}\right)\left(1-\frac{x_0-1}{\zeta}+\ldots\right)=\left(-\frac{x_0-1}{\zeta}+\ldots\right)\Rightarrow \text{RESIDUO}=-x_0+1$$

- singolarità in x_0:

$$\sqrt{\frac{z}{1-z}}\frac{z-\frac{3}{2}}{z-x_0}=\frac{1}{z-x_0}\left(z-\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{z}{1-z}}\Rightarrow \text{RESIDUO}=\left(x_0-\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{x_0}{1-x_0}}$$

E dunque:

$$w_{LM}(x_0)=\frac{\varepsilon}{2\pi}\sqrt{\frac{1-x_0}{x_0}}2\pi i\left(i(1-x_0)+\left(x_0-\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{x_0}{1-x_0}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_{LM}(x_0)=\varepsilon\left(\sqrt{\frac{1-x_0}{x_0}}(x_0-1)+i\left(x_0-\frac{3}{2}\right)\right)$$

Si noti che la parte immaginaria (che è l'opposto della velocità orizzontale) rispetta la condizione al contorno.

Il coefficiente di pressione è $-2u$, e può essere calcolato ricordando la simmetria del problema:

$$\begin{cases} c_{pDORSO}=-2u_{DORSO}=-2(u_{LM}+u_{SP}) \\ c_{pVENTRE}=-2u_{VENTRE}=-2(-u_{LM}+u_{SP}) \end{cases}\Rightarrow$$

$$c_p=4u_{LM}=4\varepsilon\sqrt{\frac{1-x}{x}}(x-1)$$

Si possono inoltre calcolare:

- angolo di portanza nulla:

$$\alpha_0=\frac{2}{\pi}\int_0^1 v_{LM}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=\frac{2\varepsilon}{\pi}\int_0^1\left(-x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=\frac{3}{4}\varepsilon$$

- angolo di Theodorsen:

$$\alpha_{Th}=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{v_{LM}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^1\frac{\frac{3}{2}-x}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\varepsilon$$

- coefficiente di momento:

$$c_m = -4\int_0^1 v_{LM}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx = -4\varepsilon\int_0^1\left(\frac{3}{2}-x\right)\sqrt{\frac{x}{1-x}}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx = \frac{\pi}{4}\varepsilon$$

Si noti come tutti i risultati siano lineari in ε.

ESERCIZIO 12

Calcolare la linea media del profilo sottile (sull'asse x, tra 0 e 1) con:

$$c_{pVENTRE} = c_{pDORSO} = 1 - x$$

SOLUZIONE

E' noto che:

$c_p = -2u$

per cui è immediato trovare la condizione per la *u* tra 0 e 1. Data l'antisimmetria del problema, al di fuori di tale segmento la velocità *u* sarà nulla; pertanto sarà possibile usare la formula di Hilbert:

$$v_{LM}(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{u_{LM}(x)}{x-x_0}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{x-x_0}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^1\left(1+\frac{x_0-1}{x-x_0}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\left(1+(x_0-1)\ln\left|\frac{1-x_0}{x_0}\right|\right)$$

e dunque, ricordando che:

$$v_{LM}(x) = \frac{d(y_{LM})}{dx}$$

si avrà:

$$y_{LM}(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{x_0}\left(1+(x-1)\ln\left|\frac{1-x}{x}\right|\right)dx = \frac{1}{2\pi}\left((1-x_0)^2\left(\frac{1}{2}\ln(1-x_0)-\frac{1}{4}\right)-x_0^2\left(\frac{1}{2}\ln x_0-\frac{1}{4}\right)+x_0\ln x_0\right)$$

ESERCIZIO 13

Calcolare la linea media e angolo di Theodorsen del profilo sottile (sull'asse x, tra 0 e 1) con:

$$c_{pVENTRE} = c_{pDORSO} = 1$$

SOLUZIONE

E' noto che:

$c_p = -2u$

per cui è immediato trovare la condizione per la *u* tra 0 e 1. Data l'antisimmetria del problema, al di fuori di tale segmento la velocità *u* sarà nulla; pertanto sarà possibile usare la formula di Hilbert:

$$v_{LM}(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{u_{LM}(x)}{x-x_0}dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{x-x_0}dx = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\left|\frac{x_0}{1-x_0}\right|\right)$$

e dunque, ricordando che:

$$v_{LM}(x)=\frac{d(y_{LM})}{dx}$$

si avrà:

$$y_{LM}(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{x_0}\ln\left|\frac{x}{1-x}\right|dx=\frac{1}{2\pi}\left(x_0\ln x_0+(1-x_0)\ln(1-x_0)\right)$$

Quanto all'angolo di Theodorsen, sarà:

$$\alpha_{Th}=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{v_{LM}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^1\frac{\ln\left|\frac{1-x}{x}\right|}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

Tale integrale sembra essere di difficile soluzione, ma si provi ad operare la sostituzione:

$$x=x'+\frac{1}{2}$$

per cui diventa:

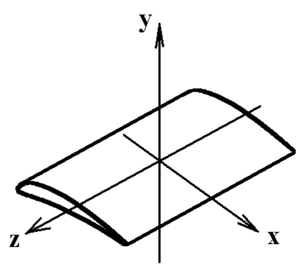
$$\alpha_{Th}=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln\left|\frac{x'+\frac{1}{2}}{x'-\frac{1}{2}}\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}+x'\right)\left(\frac{1}{2}-x'\right)}}dx'$$

essendo l'integranda funzione dispari integrata su intervallo simmetrico, sarà:

$$\alpha_{Th}=0$$

ESERCIZIO 14

Calcolare le espressioni del momento di rollio e di imbardata in funzione della circolazione per l'ala tridimensionale con il modello della linea portante di Prandtl.



SOLUZIONE

Si ipotizza l'ala disposta parallelamente all'asse Z, che si estende da *–A* a *+A*.

Si ricordino le espressioni per portanza e resistenza indotta, ricavate da considerazioni sul piano di Trefftz:

$$\begin{cases} L = \rho v_\infty \int_{-A}^{A} \Gamma(z) dz \\ D_I = -\frac{\rho}{2} \int_{-A}^{A} \Gamma(z) v(z) dz \end{cases}$$

La trasformazione fra la soluzione "prototipo" del cerchio in variabile complessa e la traccia della scia sul piano di Trefftz è tale che:

$z = A\cos\theta \Rightarrow dz = -A\sin\theta \, d\theta$

esprimendo quindi il potenziale secondo il suo sviluppo di Fourier si ha:

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\theta) \Rightarrow \Gamma(\theta) = 2\varphi(\theta) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\theta)$$

In questo modo l'espressione della velocità verticale sul piano di Trefftz in corrispondenza della traccia della scia è data da:

$$v(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n b_n \sin(n\theta)}{A\sin\theta}$$

Momento di rollio

In questo modo viene indicato il momento attorno all'asse X; vale che:

$$dM_x = -z dL \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_x = -\rho v_\infty \int_{-A}^{A} z\Gamma(z) dz = -\rho v_\infty \int_0^\pi A\cos\theta \left(\sum_{n=1}^{+\infty} 2b_n \sin(n\theta) \right) A\sin\theta \, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2} \rho v_\infty A^2 \int_0^\pi \sin(2\theta) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} 2b_n \sin(n\theta) \right) d\theta$$

Ricordando la proprietà di ortogonalità delle sinusoidi si ottiene subito il risultato; infatti l'integrale del prodotto dei seni dà sempre 0 tranne che per $n = 2$:

$$M_x = -\frac{\pi}{2} \rho v_\infty A^2 b_2$$

Momento di imbardata

In questo modo viene indicato il momento attorno all'asse Y; vale che:

$$dM_y = z dD_I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_y = -\frac{1}{2} \rho \int_{-A}^{A} z\Gamma(z) v(z) dz = \frac{1}{2} \rho \int_0^\pi A\cos\theta \left(\sum_{n=1}^{+\infty} 2b_n \sin(n\theta) \right) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m b_m \sin(m\theta)}{A\sin\theta} A\sin\theta \, d\theta =$$

$$= \rho A \int_0^\pi \cos\theta \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} m b_m b_n \sin(m\theta) \sin(n\theta) \right) d\theta$$

Dalla trigonometria è noto che:

$$\sin(m\theta)\sin(n\theta) = \frac{1}{2} \left(\cos((m-n)\theta) - \cos((m+n)\theta) \right)$$

per cui si avrà:

$$M_y = \frac{1}{2} \rho A \int_0^\pi \cos\theta \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} m b_m b_n \left(\cos((m-n)\theta) - \cos((m+n)\theta) \right) \right) d\theta$$

Data l'ortogonalità dei coseni, si avranno risultati diversi da zero solo per $m - n = 1$, per $m - n = -1$ e per $m + n = 1$. Quest'ultima eventualità però non si può verificare dato che entrambi gli indici partono da uno, pertanto resteranno solo i contributi del primo coseno:

$$M_y = \frac{\pi}{4}\rho A\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)b_{n+1}b_n\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((n-1)b_{n-1}b_n\right)\right)$$

Il primo termine della seconda sommatoria non c'è perché è nullo $(n - 1)$ per cui si può operare un cambiamento di indice e far partire la sommatoria da 2:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n-1)b_{n-1}b_n\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left((n-1)b_{n-1}b_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(nb_nb_{n+1}\right)$$

e infine:

$$M_y = \frac{\pi}{4}\rho A\sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)b_{n+1}b_n$$

Coefficienti

Si ricordino le definizioni di allungamento e corda media:

$$\begin{cases} E = \dfrac{4A^2}{S} \\ c = \dfrac{S}{2A} = \dfrac{2A}{E} \end{cases}$$

Coefficiente di rollio:

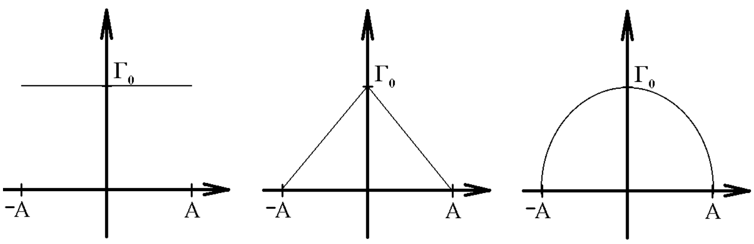
$$c_R = \frac{M_x}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 Sc} = -\frac{\frac{\pi}{2}\rho v_\infty A^2 b_2}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 Sc} = -\frac{\pi A^2 b_2}{v_\infty \frac{4A^2}{E}\frac{2A}{E}} = -\frac{\pi b_2 E^2}{8Av_\infty}$$

Coefficiente di imbardata:

$$c_I = \frac{M_y}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 Sc} = -\frac{\frac{\pi}{4}\rho A\sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)b_{n+1}b_n}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 Sc} = -\frac{\pi A\sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)b_{n+1}b_n}{2v_\infty^2 \frac{4A^2}{E}\frac{2A}{E}} = -\frac{\pi E^2\sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)b_{n+1}b_n}{16A^2 v_\infty^2}$$

ESERCIZIO 15

Calcolare le espressioni di portanza e resistenza indotta per l'ala tridimensionale con il modello della linea portante di Prandtl per le tre seguenti distribuzioni di circolazione:



SOLUZIONE

Si ricordino le espressioni per portanza e resistenza indotta, ricavate da considerazioni sul piano di Trefftz:

$$\begin{cases} L = \rho v_\infty \int_{-A}^{A} \Gamma(z) dz \\ D_I = -\frac{\rho}{2} \int_{-A}^{A} \Gamma(z) v(z) dz \end{cases}$$

L'espressione della velocità verticale sul piano di Trefftz in corrispondenza della traccia della scia è data da:

$$v(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \frac{d\Gamma(z)}{dz} \frac{1}{z - z_0} dz$$

Prima distribuzione

La legge di tale distribuzione può essere schematizzata con la somma di due funzioni scalino:

$$\Gamma(z) = \Gamma_0 (\mathrm{sca}(z + A) - \mathrm{sca}(z - A))$$

Per cui:

$$L_1 = \rho v_\infty \int_{-A}^{A} \Gamma(z) dz = 2 \rho v_\infty A \Gamma_0$$

Il calcolo della velocità richiede la derivata della funzione scalino; si ricordi che essa è la delta di Dirac:

$$v(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \frac{d\Gamma(z)}{dz} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \int_{-A}^{A} (\delta(z + A) - \delta(z - A)) \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \left(\frac{1}{-A - z_0} - \frac{1}{A - z_0} \right)$$

$$D_1 = -\frac{\rho}{2} \int_{-A}^{A} \Gamma(z) v(z) dz = -\frac{\rho \Gamma_0^2}{4\pi} \int_{-A}^{A} \left(\frac{1}{-A - z} - \frac{1}{A - z} \right) dz = +\infty$$

Seconda distribuzione

La legge di tale distribuzione può essere schematizzata con una funzione a due tratti:

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \Gamma_0 \left(1 + \frac{z}{A} \right) & \text{per } -A < z < 0 \\ \Gamma_0 \left(1 - \frac{z}{A} \right) & \text{per } 0 < z < A \end{cases}$$

Per cui:

$$L_2 = \rho v_\infty \int_{-A}^{A} \Gamma(z) dz = \rho v_\infty A \Gamma_0$$

$$v(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \frac{d\Gamma(z)}{dz} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \left(\frac{1}{A} \int_{-A}^{0} \frac{1}{z - z_0} dz - \frac{1}{A} \int_{0}^{A} \frac{1}{z - z_0} dz \right) = \frac{\Gamma_0}{2\pi A} \ln \left| \frac{z_0^2}{(A + z_0)(A - z_0)} \right|$$

$$D_2 = -\frac{\rho}{2} \int_{-A}^{A} \Gamma(z) v(z) dz =$$

$$= -\frac{\rho \Gamma_0^2}{4\pi} \left(\int_{-A}^{0} \left(1 + \frac{z}{A} \right) \ln \frac{z^2}{(A + z)(A - z)} dz + \int_{0}^{A} \left(1 - \frac{z}{A} \right) \ln \frac{z^2}{(A + z)(A - z)} dz \right) =$$

$$= \frac{\rho\Gamma_0^2}{4\pi}\left(\int_{-A}^{0}\ln\frac{z^2}{(A+z)(A-z)}dz + \int_{0}^{A}\ln\frac{z^2}{(A+z)(A-z)}dz + \right.$$

$$\left. + \int_{-A}^{0}\frac{z}{A}\ln\frac{z^2}{(A+z)(A-z)} - \int_{0}^{A}\frac{z}{A}\ln\frac{z^2}{(A+z)(A-z)}dz\right)$$

I primi pezzi di integrale riguardano una funzione pari, pertanto data la simmetria rispetto all'origine essi sono uguali e possono essere sommati; gli ultimi due riguardano una funzione dispari e sono l'uno l'opposto dell'altro, pertanto dato il segno negativo davanti al secondo possono anch'essi essere sommati. Si ha quindi:

$$D_2 = \frac{\rho\Gamma_0^2}{2\pi}\left(\int_{0}^{A}\ln\frac{z^2}{(A+z)(A-z)}dz - \int_{0}^{A}\frac{z}{A}\ln\frac{z^2}{(A+z)(A-z)}dz\right)$$

Nel calcolo della resistenza compaiono numerosi integrali; si ricordano di seguito le primitive:

$$\int \ln x \, dx = x\ln x - x + c$$

$$\int x\ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$$

omettendo i calcoli si trova che:

$$D_2 = \frac{\rho\Gamma_0^2}{\pi}\ln 2 \cong 0{,}22\rho\Gamma_0^2$$

Terza distribuzione

La legge di tale distribuzione è quella ellittica, per la quale i risultati sono già noti dalla teoria:

$$L_3 = \rho v_\infty \int_{-A}^{A}\Gamma(z)dz = \frac{\pi}{2}\rho v_\infty A\Gamma_0$$

$$D_3 = -\frac{\rho}{2}\int_{-A}^{A}\Gamma(z)v(z)dz = \frac{\pi}{8}\rho v_\infty A\Gamma_0$$